FEIXINGQI BUJIAN KONGQI DONGLIXUE

飞行器部件空气动力学

刘君　郭正/编著

国防科技大学出版社

FEIXINGQI BUJIAN KONGQI DONGLIXUE

飞行器部件空气动力学



责任编辑/徐飞　封面设计/殷健

ISBN 978-7-81099-434-7



9 787810 994347 >

定价:19.80 元

飞行器部件空气动力学

刘 君 郭 正 编著

国防科技大学出版社
·长沙·

图书在版编目（CIP）数据

飞行器部件空气动力学/刘君，郭正编著 .—长沙：国防科技大学出版社，2007.7
ISBN 978 – 7 – 81099 – 434 – 7

Ⅰ. 飞…　Ⅱ. ①刘…②郭…　Ⅲ. 飞行器—零部件—空气动力学　Ⅳ. V411.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 099262 号

国防科技大学出版社出版发行
电话：（0731）4572640　邮政编码：410073
http://www.gfkdcbs.com
责任编辑：徐 飞　责任校对：肖 滨
新华书店总店北京发行所经销
国防科技大学印刷厂印装

开本：787×1092　1/16　印张：13　字数：308 千
2007 年 7 月第 1 版第 1 次印刷　印数：1 – 2000 册
ISBN 978 – 7 – 81099 – 434 – 7
定价：19.80 元

前　言

飞行器部件空气动力学的研究思想是从流动基本方程出发，结合实验现象提出合理假设，建立能够用于工程设计的弹体、弹翼以及翼身组合体的气动力数学模型。部件空气动力学属于经典流体力学理论的分支，曾对航空工业发展起到非常重要的促进作用，目前依然是飞行器设计的手段之一。

国防科技大学开设“飞行器部件空气动力学”课程已有二十多年历史，早期一直采用国内航空院校统编教材；近年来随着学科专业调整，原教材出现一些不适应，为此编写本教材。与杨岞生教授等人编写的同名教材相比，本书在以下几个方面进行了适当调整：

(1) 考虑到本教材主要面向飞行器设计专业，增加气动力研究与飞行器动力学系统的关系、部件空气动力学估算理论的发展历程和基本出发方程、学习部件空气动力学的意义和方法等内容介绍。

(2) 为解决空气动力学基础理论等先导性课程教学改革后出现的内容衔接问题，增补翼型理论相关内容。

(3) 删减跨声速和超声速两种流动条件下细长翼身组合体气动力估算方法相关内容，适应学时减少。

(4) 新一代导弹布局往往选用非圆截面弹体，原教材没有相关预测方法。本文作者在国家自然科学基金委员会和中国工程物理研究院 NSAF 联合基金的资助下，建立了较为完备的非圆截面导弹气动力特性预测估算方法。采用这一研究成果作为翼身组合体气动力预测理论。

(5) 在介绍翼型理论和翼身组合体干扰因子时，不涉及复变函数。

(6) 增加例题，便于课后自学。

在本书编写过程中，国防科技大学瞿章华教授审阅了书稿，提出很好的修改建议；文稿经过国防科技大学飞行器系统工程专业 2003 级本科生的教学检验；出版整理过程中，得到从广年等同志的热情帮助；在此表示感谢！
由于作者水平有限，书中纰漏之处在所难免，诚望读者提出宝贵意见。

编　者

2007 年 3 月于长沙

目　录

第一章 引 言

§1.1 飞行器动力学系统与气动力的关系

飞行器是人类制造出来、能离开地面飞行的机械总称，研究飞行器在外力作用下运动规律的学科称为飞行动力学；飞行动力学构成宇航科学技术的重要基础，也是现代科技的重要研究内容。飞行器研制中可用不同的飞行动力学系统模型描述，例如预测飞行轨迹，在总体方案论证初期，可将其作为质点处理，采用参数和约束条件较少的质点动力学方程组描述；在进入设计阶段，需要研究飞行器操纵性、稳定性等飞行品质时，可以将其作为刚体处理，采用六自由度刚体动力学方程组描述；当到了结构设计与研制阶段，涉及振动、颤振、抖振等气动弹性问题，需要将其看作在外力作用下会产生变形的弹性体，采用弹性动力学模型。

对于在地面惯性坐标系中运动的刚体动力学系统，飞行器服从牛顿第二定律和角动量守恒定律，经典力学已证明，刚体运动可分解为刚体质心位移运动和绕质心旋转运动；运动特性可以用下列6自由度动力学方程组描述：

$$\frac{\mathrm{d}m\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F} \tag{1.1}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{I}\,\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{M} \tag{1.2}$$

式中：m 为飞行器总质量；$\boldsymbol{V}$ 为质心运动速度；$\boldsymbol{I}$ 为惯量矩阵；$\boldsymbol{\omega}$ 为绕质心的角速度；$\boldsymbol{F}$ 为作用于飞行器的合外力；$\boldsymbol{M}$ 为作用于飞行器质心的合外力矩。

对于不同工程问题，根据研究惯例将上式投影到不同的坐标系，导出不同的具体表达式。例如，在自由飞弹道靶试验研究中，用地面遥测或相对地面固定的观测手段，所得数据是模型的姿态角和相对位移，采用地面固联坐标系较为方便；对于飞行试验，多数遥测传感器固联于飞行器弹体结构框架上，试验时观测量是反映质心运动和过载、绕质心转动的角度和角速率等物理量，坐标系采用随飞行器一起运动的相对坐标系较为常见，且习惯上以弹体轴线为基础的体轴系描述；常规风洞试验是根据相对运动原理，飞行器模型相对地面不动、气流相对运动的形式来研究实际飞行过程中气流不动、飞行器运动的空气动力学特性，习惯上采用以均匀气流为参考的风轴系。

飞行器研制是一个涉及众多学科的系统工程，为了便于专业研究人员交流，世界航天

航空大国对于常用的坐标系进行规范，中国也制定自己的国家标准(GB/T 16638 - 1996)，简单介绍如下：

1. 地面固联坐标轴系和牵连铅垂地面坐标轴系

地面固联坐标轴系符号 $Ox_0y_0z_0$，简称 S_0，原点与地面固连，而 z 轴铅垂向下，x 轴指向固定的参考飞行方向或特定方向；可以直观地反映出方程(1.1)描述的质心运动轨迹。若为了便于表示绕质心运动的姿态，可以把坐标原点取为飞行器质心，这时坐标系称为牵连铅垂地面坐标轴系，符号为 $Ox_gy_gz_g$，简称为 S_g。

2. 弹(机)体坐标系

弹体坐标系符号 $Oxyz$ 或 $Ox_by_bz_b$，简称为 S_b，原点位于飞行器的质心。对于轴对称体，x 轴(纵轴)取为对称轴；对于非轴对称体，通常飞行器有一个对称面，称为面对称飞行器，x 轴常取对称面(飞机参考面)内并平行于飞行器机身的轴线，指向飞行器头部。y 轴(横轴)垂直于飞行器参考面，并指向飞行器右方。z 轴(竖轴)指向下方，与 x、y 轴构成右手坐标系。

3. 气流(速度)坐标系

气流坐标系符号为 $Ox_ay_az_a$，简称为 S_a，原点位于飞行器质心。x 轴(纵轴)取为气流矢量的反向；即在小迎角时指向飞行器前方。z 轴(竖轴)位于飞行器对称面内且垂直于 x 轴，指向下方。y 轴(横轴)与 x、z 轴构成右手坐标系，并指向飞行器右方。

在此特别提醒：尽管有上述国标，但是在空气动力学等领域还未完全推广和执行，目前学术交流中很少采用。在现行的大量文献资料中，弹体坐标系与气流坐标系的轴(纵轴)指向飞行器尾部，位于对称面内垂直于 x 轴的是 y 轴(竖轴)；因此在阅读文献和使用气动数据前一定要搞清楚坐标系的定义。为便于阅读国内外文献，本书也未采用以上坐标系。

各个坐标系之间可以采用由相对关联角度建立线性矩阵进行相互转换；例如，弹体坐标系与铅垂地面坐标系之间，定义偏航角(ψ)、俯仰角(θ)和滚转角(ϕ)以后，就可以写出转换矩阵；同理，弹体坐标系与气流坐标系之间，定义迎角(α)、侧滑角(β)和滚转角(γ)以后，就可以写出转换矩阵。

不同的坐标系表示物理量的符号有不同的习惯用法，例如，在 $Ox_gy_gz_g$ 坐标系中飞行器速度 $\boldsymbol{V}$ 的投影为 u_g、v_g、w_g，飞行器角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的投影为 p_g、q_g、r_g；在 $Oxyz$ 坐标系中速度 $\boldsymbol{V}$ 的投影为 u、v、w，角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的投影为 p、q、r。

弹体坐标系相对于地面为非惯性系，质心动力学方程组(1.1)写为：

$$\left.\begin{aligned} \dot{u} &= -qw + rv + g(n_x - \sin\theta) \\ \dot{v} &= -ru + pw + g(n_y + \cos\theta\sin\phi) \\ \dot{w} &= -pv + qu + g(n_z + \cos\theta\cos\phi) \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

对于存在面对称(假设 $y=0$ 平面)的飞行器，惯量积 $I_{xy} = I_{yz} = 0$，绕质心转动的动力学方程组(1.2)整理后写为：

$$
\left.\begin{aligned}
\dot{p} &= \frac{1}{D}\left[\left(\frac{I_y - I_z}{I_x} - \frac{I_{xz}^2}{I_x I_z}\right)qr + \left(\frac{I_x - I_y}{I_z} + 1\right)\frac{I_{xz}}{I_x}pq + \frac{q_\infty Sl}{I_x}\left(C_l + \frac{I_{xz}}{I_z}C_n\right)\right] \\
\dot{q} &= \frac{I_z - I_x}{I_y}pr + \frac{I_{xz}}{I_y}(r^2 - p^2) + \frac{q_\infty SlC_m}{I_y} \\
\dot{r} &= \frac{1}{D}\left[\left(\frac{I_x - I_y}{I_z} + \frac{I_{xz}^2}{I_x I_z}\right)pq + \left(\frac{I_y - I_z}{I_x} - 1\right)\frac{I_{xz}}{I_z}qr + \frac{q_\infty Sl}{I_z}\left(C_n + \frac{I_{xz}}{I_x}C_l\right)\right] \\
D &= 1 - \frac{I_{xz}^2}{I_x I_z}
\end{aligned}\right\} \tag{1.4}
$$

式中：n_x、n_y、n_z——过载分量，由气动力和推力构成：

$$
\left.\begin{aligned}
n_x &= \frac{1}{mg}(T\cos\psi_T\cos\varphi_T - q_\infty SC_A) \\
n_y &= \frac{1}{mg}(T\sin\psi_T + q_\infty SC_Y) \\
n_z &= \frac{1}{mg}(T\cos\psi_T\sin\varphi_T - q_\infty SC_N)
\end{aligned}\right\} \tag{1.5}
$$

式中：$q_\infty = 0.5\rho_\infty u_\infty^2$——动压；$u_\infty$——飞行速度；$\rho_\infty$——大气密度；$S$——参考面积；$l$——参考长度；$m$——飞行器质量；$I_x$、$I_y$、$I_z$——惯量矩；$I_{xz}$——惯量积；$C_A$、$C_Y$、$C_N$——气动力分量（轴向力、侧向力、法向力）；$C_l$、$C_m$、$C_n$——气动力矩分量（滚转力矩、俯仰力矩、偏航力矩）；g——重力加速度。T 为发动机推力；推力作用线偏离质心通常较小，对质心的力矩贡献近似为零；ψ_T 为推力作用线与 Oxz 平面的夹角；φ_T 为推力作用线在 Oxz 平面上的投影与 Ox 轴的夹角。

从原理上说，如果飞行过程中作用力和力矩的变化规律已知，就可以准确预测飞行器速度、姿态、轨迹等运动特性；姿态角方程组：

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{d\theta}{dt} &= q\cos\phi - r\sin\phi \\
\frac{d\phi}{dt} &= p + \tan\theta(q\sin\phi + r\cos\phi) \\
\frac{d\psi}{dt} &= (q\sin\phi + r\cos\phi)/\cos\theta
\end{aligned}\right\} \tag{1.6}
$$

位移运动方程组：

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{dx'_g}{dt} &= u\cos\theta\cos\psi + v(\sin\theta\cos\psi\sin\phi - \sin\psi\cos\phi) \\
&\quad + w(\sin\theta\cos\psi\cos\phi + \sin\psi\sin\phi) \\
\frac{dy'_g}{dt} &= u\cos\theta\sin\psi + v(\sin\theta\sin\psi\sin\phi + \cos\psi\cos\phi) \\
&\quad + w(\sin\theta\sin\psi\cos\phi - \cos\psi\sin\phi) \\
\frac{dz'_g}{dt} &= -u\sin\theta + v\cos\theta\sin\phi + w\cos\theta\cos\phi
\end{aligned}\right\} \tag{1.7}
$$

式中：x'_g、y'_g、z'_g 为飞行器质心位置在铅垂地面坐标轴系的坐标值。

但是，对于具体的工程问题，这些作用力和力矩的规律非常复杂，有时甚至还没有较

为准确的数学表达形式,因此研究和建立描述反映物理现象本质规律的作用力和力矩的数学模型,是准确预测飞行器运动特性的基础,也是飞行器动力学系统的主要研究内容。飞行器研制中很多的工作就是通过实验测试、理论分析和计算仿真手段获取作用在飞行器上的力和力矩。

在以上动力学方程组中,重力加速度是高度和经纬度的函数,重力加速度模型的研究由地球物理学家进行。在多数情况下,重力加速度常取为高度和纬度的已知函数,采用下列经验公式计算:

$$g = 9.80612 + (-258.65\cos 2\phi + 0.58\cos^2 2\phi - 0.38H) \times 10^{-4} \tag{1.8}$$

式中:ϕ 和 H 分别为飞行器的当地纬度和海拔高度。目前相对气动力和推力的研究成就,大气层内飞行器按照以上公式确定重力加速度已有足够精度。

飞行器推力由发动机提供,常用发动机有活塞式发动机、火箭发动机、燃气涡轮发动机和冲压发动机等;其中,液体火箭或固体火箭都是根据动量守恒定理,采用高压燃气由喷管向后排出而产生推力,发动机推力主要取决于燃料物理化学特性、燃烧室温度及压力等参数,与飞行状态参数关系很小。目前飞行器动力学方程组中的推力模型大多直接取用地面发动机实验数据,飞行状态下进行高度修正:

$$T(H) = T(0) + [p_\infty(0) - p_\infty(H)]S_{ex} \tag{1.9}$$

式中:S_{ex}、T 和 p_∞ 分别为喷管出口面积、推力和飞行环境压力;H 是飞行高度。

航空飞行器在大气层内使用,航天飞行器要穿越大气层,飞行器的轨迹、稳定性、机动性和可控性都取决于飞行器所承受的气动力,研究飞行器与空气之间相互作用规律的空气动力学是飞行器设计计算、仿真系统研制和飞行特性分析所必不可少的,是飞行器设计和系统工程的重要基础。

气动力模型与飞行状态参数密切相关,飞行器与空气之间相互作用规律非常复杂,地面试验有一定局限性,很少能给出如上述火箭发动机推力和重力那样简单的数学表达式,只能给出一些采用偏微分方程组、偏微分 - 积分方程组描述的关系;对某些情况,例如湍流、分离流、非定常流动状态,甚至迄今还没有建立能够达到工程要求精度的方程组。

飞行器气动力研究属于空气动力学,这门学科既是一门面向工程应用性很强的技术科学,又是一门非常注重新概念、新方法、新理论研究的基础科学。在飞行器的发展历程中,空气动力学的理论创新成果常常导引飞行器设计的更新换代:20 世纪初,环量和升力理论、边界层理论和阻力预测方法的建立,为飞机的发展奠定基础;20 世纪 40—50 年代可压缩气体动力学理论的进展,指导布局设计中提出跨声速面积律和后掠翼概念,帮助人类突破声障、实现超声速飞行;20 世纪 70 年代对大迎角细长体的脱体涡流动机理的深入研究建立了非线性涡升力模型,产生了高机动性能的第三代战斗机;20 世纪 80 年代后期非定常特性、隐身技术、冲压技术等基础理论模型的研究正在推动新一代战斗机和航天飞机的研制。

下面对飞行器气动力的研究方法进行简单介绍。

§1.2 飞行器气动力研究方法

流体动力学是研究与流体有相对运动的物体(飞行器)受力规律的学科;如果流体介质为气体,又称为空气动力学。流体动力学主要有三种研究手段,理论分析、实验观测和计算模拟。

理论流体力学显著特点是具有相对完整的理论体系。18世纪,Bernoulli、Euler、D'Alembert、Lagrange等人创建了理想流体动力学,给出了不考虑粘性影响的流体动力学基本方程,即Euler方程;19世纪,Navier(1823)和Stokes(1845)研究了考虑粘性的流体动力学问题,给出流体内部应力和运动速度的关系,建立了Navier-Stokes方程;其后,Reynold根据实验观测现象提出湍流模型,建立了雷诺平均的Navier-Stokes方程。20世纪初,Prandtl和Karman等人对雷诺平均的Navier-Stokes方程的简化及封闭问题进行了深入的研究,创建了边界层理论、混合长度理论、边界层积分方程、湍流工程模型等,这些工作都是对经典流体力学理论的重要补充。随着飞行器速度的不断增加,流体压缩性影响和热力学耦合效应变得日益重要,Riceman和Hugoniot等人研究了可压缩流体的热力学问题,建立了可压缩流体动力学的基本方程组,即可压缩的Navier-Stokes方程和Euler方程;至此,经典的流体力学理论框架已建立。近年来,由于航空、航天、生物、微机电工程等技术发展需要,理论流体力学呈现出勃勃生机,在经典流体力学理论基础上产生许多新的交叉学科,流体力学与电磁学结合,建立了电磁流体动力学;流体力学与化学动力学结合,建立了非平衡流体动力学等;还出现研究心血管内流动、药物分子输运过程的生物流体力学,和研究动物飞行、游动机理的仿生流体力学等研究分支领域。

早在1903年之前,莱特兄弟为了研制飞机,除了勇敢的滑翔试飞外,还设计建造了试验段为110cm^{2}的小型低速风洞(世界上较早的风洞)来研究飞机受到的气动力作用规律,最终帮助他们实现了人类第一次带动力飞行的梦想。由此看来,飞行试验和地面实验从来就是飞行器气动力的重要研究手段。在莱特兄弟的年代,飞行器气动力模型主要依靠飞行试验获取,1911年布莱恩(G.H.Bryan)给出了飞机升力和迎角的线性模型。随着飞行器研究深入,对气动力数学模型要求越来越高,考虑因素越来越多(速度、角速率、迎角、侧滑角、飞行高度、升降舵、副翼、方向舵的舵面偏转角等),依靠飞行试验开展气动力建模研究成本高、风险大、周期长;因此从飞机进入人们视线那一刻起,就在寻找能够代替真实飞行试验的研究手段。在现代飞行器研制过程中,飞行试验对气动力建模的贡献是后期模型验证;前期的气动力研究主要依靠地面风洞和计算流体力学模拟。

为了解决工程实际问题和深入研究流体动力学行为,人们在流体动力学理论指导下,利用相对运动原理,建立了如风洞、激波管、电弧加热器等地面实验设备,根据相似定律和相似准则设计模型和分析实验参数,通过直接观测流动过程和测量流动参数,开展流体动力学研究,形成流体动力学一个重要分支,即实验流体动力学。实验流体动力学不仅是获取航空航天飞行器设计所需气动数据的重要手段,而且从实验研究发现新现象和总结新规律是提出新概念、建立新理论的基础。实验研究具有真实可靠的特点,但是,地面实验

设备有洞壁、支架等，所模拟的状态与实际飞行状态有区别，几乎所有的地面实验设备都不能完全满足所有相似参数要求；此外，实验中的过程噪声和测量噪声也会影响所得结果，还有，实验往往耗费大量的人力物力，有时建造满足特别研究需求的模拟设备经常会有许多困难。

20世纪50年代以后，计算机发展非常迅速，使得数值求解流体动力学的基本方程成为可能。从20世纪60年代起，许多流体力学家、计算数学家研究流体力学基本方程的数值求解方法，研制相应计算机软件，一个流体力学新分支逐渐形成——计算流体动力学(CFD)。所谓计算流体动力学，就是在高速电子计算机上数值求解流体动力学基本方程研究流体力学问题的学科。通过数值求解简化程度不同的流体动力学方程，获取各种条件下流场参数和作用在物体上的力、热等特性，为飞行器设计师提供所需的数据。计算流体动力学作为一种新的研究手段，具有经济、快捷、流场信息量大等优点，而且可以方便地向相邻和相关学科渗透和结合，在化学流体动力学、气动光学、电磁流体力学等交叉学科研究中更是起到了不可替代的推动作用；但是，计算基础是流体动力学基本方程的离散近似，从方法上存在如下问题，即描述物理问题基本方程是否准确？离散基本方程计算方法精度如何？这两个重要问题是计算流体动力学进一步在工程中发挥作用的关键，目前对于软件的验证和确认是计算流体动力学界面临的重大课题。

从原理上说，以上这三种手段都可以开展气动力研究，得到上节描述飞行器动力学方程组中需要的气动力模型。在飞行器设计过程中，一般要经过概念探索、预先研究、研制改进等几个阶段，不同的阶段对气动力模型准确性要求不同，因此在工程应用中存在根据时间和经费等因素选择气动力研究手段的问题。在飞行器概念设计阶段，需要在多种外形方案中进行筛选；到了初步设计阶段，为满足动力、控制、结构、战斗部等子系统约束，经常修改布局外形；最后外形基本确定，就需要精细的气动力模型。在飞行器概念和方案论证阶段，完全依靠实验，除了高昂的经费开支外，还需要较长的时间，显然很不方便；采用计算流体动力学可以极大地提高效率，但是，对于需要在广阔的范围内筛选外形和涉及较多参数的多学科外形优化设计的情况，目前计算流体动力学也显得力不从心，难以满足工程应用需求；这些时候往往对气动力的预测精度要求不高，有时甚至能给出一个正确趋势就行，但是希望快速高效，最好是按下计算机程序“执行键”就能得到数据或结论，为此在经典流体力学理论指导下，从20世纪60年代初发展了气动力快速工程估算方法——部件组拆法；直到目前依然是在方案设计阶段，工程型号部门使用最多、最有效的气动力预测手段。

§1.3 部件组拆法基本思想

顾名思义，部件组拆法(Component Build - Up, CBU)就是将飞行器的气动部件，主要是弹体、弹翼和尾翼，单独拆分出来，先研究这些部件在孤立状态下的气动载荷和气动力特性，然后再进行组合得到飞行器总的气动力，组合过程不是简单的叠加求和，要考虑各个部件之间的干扰影响。

下面以图 1.1 所示的常见弹体—弹翼—尾翼布局外形的法向力为例，来简单介绍部件组拆法的基本思想。首先，分别研究飞行器各个单独部件的气动力特性，得到弹体、弹翼和尾翼的法向力 C_{N_B}，C_{N_W}，C_{N_T}；然后，写出飞行器总的法向力 $C_{N_{BWT}}$ 表达形式为：

$$C_{N_{BWT}} = K_{B(W)} \cdot C_{N_B} + K_{W(B)} \cdot C_{N_W} + K_{T(BW)} \cdot C_{N_T} \tag{1.10}$$

弹体和弹翼组合在一起存在相互干扰，这时弹体产生的法向力与单独弹体的法向力不同，需要进行修正，修正系数 $K_{B(W)}$ 称为弹翼对弹体干扰因子；同样，弹体对弹翼存在干扰，$K_{W(B)}$ 称为弹体对弹翼干扰因子；由于正常布局尾翼位于飞行器绕流场的下游，认为扰动逆流传播影响较小，因此尾翼对弹体和弹翼法向力的干扰可忽略，但是必须要考虑弹体和弹翼对尾翼法向力的干扰，干扰因子是 $K_{T(BW)}$。因此，部件组拆法中还需要研究这些干扰因子。

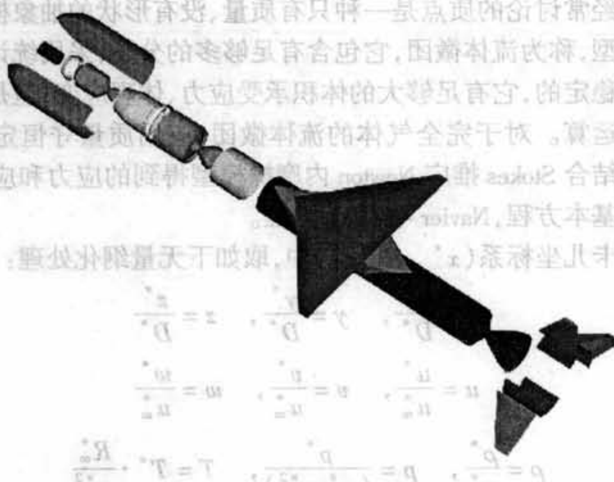


图 1.1 弹体—弹翼—尾翼布局的飞行器

可以看出，分解为部件以后，单独尾翼和单独弹翼外形相似，习惯上统称为弹翼。由于部件组拆法早期主要研究对象是飞机，尽管现在更多应用于导弹，但是在许多著作中还是保留历史习惯，把弹体和弹翼也称为机身和机翼。

部件组拆法主要研究的内容是弹体、弹翼以及在翼身组合过程干扰因子这样三类问题。

原则上，确定部件组拆法中弹体、弹翼的气动力可以采用实验观测和计算模拟手段得到，但是实际应用中一般采用部件空气动力学(Aerodynamics on Components of aircrafts)理论给出。部件空气动力学是理论流体力学的一个重要分支，从研究手段来说，部件空气动力学属于理论建模，主要在物理现象指导下对经典流体力学基本方程进行简化，建立能够用于工程设计的气动力数学模型。

部件空气动力学属于经典流体力学理论基础上产生的学科。从第一次世界大战以后，飞机设计、制造和驾驶有了明显分工，流体力学理论研究工作者介入这一领域，在部件组拆法思想指导下，对薄翼型、弹翼和旋成体形状机身的气动力问题进行系统理论分析研究，到上个世纪 70 年代基本完善，逐步形成这门学科。部件空气动力学对航空工业的发

展起到了非常重要的促进作用，目前依然是飞机和导弹设计的重要手段。

部件空气动力学体现了工程中遇到技术难题常采用“抓住重点、分解难点、形成特点”的解决路线，从表述流动基本原理的方程出发，结合实验现象提出合理的假设，使得复杂的、具有定性指导意义的理论逐步演化为简单的、用于定量分析的模型，这种研究方法在很多学科领域都具有共性，因此在学习本课程中，除了掌握建立的飞行部件空气动力学特性等知识外，体会和掌握这种研究方法也很重要。

下面简单介绍部件空气动力学所依靠的经典流体力学理论基础。

§1.4 部件空气动力学理论基础

在理论力学中经常讨论的质点是一种只有质量、没有形状的抽象模型；在流体力学中也有类似的理论模型，称为流体微团，它包含有足够多的分子，采用统计量来描述其密度、温度等宏观特性是稳定的，它有足够大的体积承受应力、体现应变；但是它又可以无穷小，存在数学上的极限运算。对于完全气体的流体微团，应用质量守恒定律、Newton 第二定律、能量守恒定律，结合 Stokes 推广 Newton 内摩擦模型得到的应力和应变的关系式，就建立了流体动力学的基本方程，Navier - Stokes 方程。

在惯性直角笛卡儿坐标系(x^*,y^*,z^*)中，取如下无量纲化处理：

$$x=\frac{x^*}{D^*},\quad y=\frac{y^*}{D^*},\quad z=\frac{z^*}{D^*}$$

$$u=\frac{u^*}{u_\infty^*},\quad v=\frac{v^*}{u_\infty^*},\quad w=\frac{w^*}{u_\infty^*}$$

$$\rho=\frac{\rho^*}{\rho_\infty^*},\quad p=\frac{p^*}{(\rho_\infty^* u_\infty^{*2})},\quad T=T^*\cdot\frac{R_\infty^*}{u_\infty^{*2}}$$

$$t=\frac{t^* u_\infty^*}{D^*},\quad \mu=\frac{\mu^*}{\mu_\infty^*},\quad M_\infty=\frac{u_\infty^*}{a_\infty^*}$$

其中，上标“$*$”表示有量纲物理量；下标“∞”表示(气体)参考物理量，一般采用自由来流或均匀静止大气参数。D 为特征长度，x,y,z 为笛卡儿坐标分量，u,v,w 为对应的速度分量，ρ,T,p,μ 分别为气体的密度、温度、压力和动力粘性系数；t、a 分别为时间和自由来流的声速；R_∞^* 是气体常数，对于空气 $R_\infty^*=287\text{J/(kg·K)}$。

假设气体为常比热完全气体，无量纲以后 Navier - Stokes 方程可表述如下：

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}+\frac{\partial(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}_v)}{\partial x}+\frac{\partial(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{G}_v)}{\partial y}+\frac{\partial(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{H}_v)}{\partial z}=0 \tag{1.11}$$

其中：

$$\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho w\\ E\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho uv\\ \rho uw\\ (E+p)u\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{G}=\begin{pmatrix}\rho v\\ \rho uv\\ \rho v^2+p\\ \rho vw\\ (E+p)v\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}\rho w\\ \rho uw\\ \rho vw\\ \rho w^2+p\\ (E+p)w\end{pmatrix}$$

$$F_V = -\frac{\mu}{\mathrm{Re}}\begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} + q_x \end{pmatrix}, \quad G_V = -\frac{\mu}{\mathrm{Re}}\begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} + q_y \end{pmatrix}$$

$$H_V = -\frac{\mu}{\mathrm{Re}}\begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zz} \\ u\tau_{xz} + v\tau_{yz} + w\tau_{zz} + q_z \end{pmatrix}$$

式中：

$$E = e + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2 + w^2)$$

$$\tau_{xx} = \frac{4}{3}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\tau_{yy} = -\frac{2}{3}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{4}{3}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\tau_{zz} = -\frac{2}{3}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{4}{3}\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\tau_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \tau_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \tau_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$q_x = k\frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y = k\frac{\partial T}{\partial y}, \quad q_z = k\frac{\partial T}{\partial z}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho_\infty^* u_\infty^* D^*}{\mu_\infty^*}, \quad \mathrm{Pr} = \frac{\mu_\infty^* c_p^*}{k_\infty^*}$$

如果是湍流问题，求上式中粘性系数 μ 和热传导系数 k 可能涉及到另外的偏微分方程，在此不做讨论。对于层流问题，根据气体运动论，可以把层流粘性系数 μ_l 和层流热传导系数 k' 表示为温度的函数，空气粘性系数 μ_l 由 Sutherland 公式给出：

$$\mu_l = T^{3/2} \times \frac{1 + \frac{110.4}{T_\infty^*}}{T + \frac{110.4}{T_\infty^*}} \tag{1.12}$$

热传导系数 k' 和粘性系数 μ_l 之间采用如下关系：

$$k' = \frac{c_p^*}{(R^* P_r)} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{1}{P_r} \tag{1.13}$$

建立式(1.13)时，实际上隐含使用定义比热比 $\gamma = c_p^* / c_v^*$ 和普适气体常数 $R^* = c_p^* - c_v^*$ 的条件。根据分子动力学理论推导出双原子分子的比 $\gamma = 7/5 = 1.4$ 热比，在大部分情况下用于空气也能达到较为满意的精度。

以上方程式不封闭，还需要增加状态方程和内能关系式，对于完全气体，有：

$$\left.\begin{aligned}p &= T\cdot\rho\\ e &= \frac{p}{\gamma-1}\end{aligned}\right\} \tag{1.14}$$

（注意：温度取不同无量纲参数会得到不同的状态方程表达式；例如采用环境温度无量纲 $T = T^*/T_\infty^*$，得到状态方程为 $p = T\rho/\gamma$，相应的热传导系数的形式也要变化）

Navier－Stokes 方程是连续介质流体力学最基本的方程，是流体运动的质量守恒、动量守恒和能量守恒定律的严格数学形式，是流体动力学研究的理论基础。

从原理上说，根据特定的飞行器提出初始条件和边界条件，就可以得到以上流体动力学方程的解，即飞行器周围流场随时间和空间变化的物理量；沿表面积分可以得到流场内运动气体作用在飞行器上的气动力：

$$\boldsymbol{F} = -\oiint_s [p]\cdot\boldsymbol{n}\cdot \mathrm{d}\sigma \tag{1.15}$$

$$\boldsymbol{M} = -\oiint_s ([p]\cdot\boldsymbol{n})\times\boldsymbol{r}\cdot \mathrm{d}\sigma \tag{1.16}$$

式中：$\boldsymbol{F}$ 为流体作用于飞行器的合力，$\boldsymbol{M}$ 为合力矩；S 为飞行器与流体接触的外表面，$\mathrm{d}\sigma$ 为微元面积，$\boldsymbol{n}$ 为微元 $\mathrm{d}\sigma$ 的指向流体的单位法向矢量；$[p]$为流体作用单位微元上应力张量，对于粘性流体，应力张量包括剪切应力和正应力。

但是，非常遗憾的是只有极少数流体动力学问题可以得到满足方程和初边值条件的解析解，大部分与工程应用的问题不可能得到解析解。在没有形成计算流体力学之前，经典流体动力学理论的 Navier－Stokes 方程主要有两个方面的应用。

第一个方面的重要应用就是指导实验研究。实验是流体动力学研究的重要手段，但是，在很多情况下，地面实验设备难以准确复现实际飞行环境和过程，因此地面实验仅仅是实际流动过程的近似模拟。那么如何指导地面设备建设和实验模拟？这时就需要流体动力学理论的指导。从流体动力学基本方程推演出流动相似需要满足的充分必要条件，在满足几何相似和运动相似条件下，流动只和几个无量纲的参数有关；例如对于常见的、大气层内运动的飞机或导弹，这些参数主要包括：马赫数（Mach number, M_∞），雷诺数（Reynolds Number, Re），普朗特数（Prandtl Number, Pr），如果流动是非定常的，还多一个和流动改变的特征时间有关系的无量纲数：斯特劳哈数（Strouhal Number, St），这些参数控制着流动的动力学特点；在相似律的指导下开展实验可以使地面研究有效解决实际飞行器的力学问题。几乎所有的地面实验设备都不能完全满足实际飞行器和飞行环境所有相似参数，根据研究问题的重点不同，应合理取舍相似参数。

第二种应用是结合流动机理进行模型简化。例如，Prandtl 在实验观测基础上假设在雷诺数足够大时，粘性影响局限于物面邻近的薄层内，在这薄层中流动方向速度的二阶导数项，比起横穿流动方向的二阶导数项小得多，可以省略；基于这一假设，从 Navier－Stokes 方程出发中，通过量级分析，导出边界层方程。常规细长弹体、薄翼布局飞行器在小迎角飞行状态，物体附近没有分离流动，表面应力张量中剪切应力与正应力相比很小，可以忽略，流体粘性对升力等气动特性影响很小，可以引入无粘性假设，即令以上 Navier－Stokes 方程中粘性项 $\boldsymbol{F}_v = \boldsymbol{G}_v = \boldsymbol{H}_v = 0$，这时应力张量只有垂直于物体表面的正应力，退化为标

量，称为压力或压强。许多飞机和导弹在巡航时采用均匀速度飞行，不考虑大气随机参数影响，可以认为飞行器绕流场不随时间变化，即 Navier – Stokes 方程中时间导数为零。对于理想流体，在没有激波等间断的情况下，还可以采用等熵假设。在无粘、定常、等熵假设条件下，从 Navier – Stokes 方程出发，得到理想流体的 Euler 方程，采用算子形式表达的 Euler 方程如下：

$$\nabla(\rho \boldsymbol{V})=0$$

$$(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}=-\frac{1}{\rho}\nabla p$$

$$\nabla\left(\frac{p}{\rho^{\gamma}}\right)=0 \tag{1.17}$$

在等熵条件下流体声速 $a=\sqrt{\gamma p/\rho}$，对以上 Euler 方程的质量和能量方程整理：

$$\frac{1}{\rho}\boldsymbol{V}\cdot(\nabla\rho)=-\nabla\cdot\boldsymbol{V}\quad \nabla p=a^2\nabla\rho$$

代入动量方程，得到：

$$\boldsymbol{V}[(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}]=a^2(\nabla\cdot\boldsymbol{V}) \tag{1.18}$$

尽管 Euler 方程的形式比 Navier – Stokes 方程简单许多，但是依然难以得到解析解，因此需要增加约束条件作进一步简化。引入无旋假设 $\nabla\times\boldsymbol{V}=0$，且流场内速度连续，则存在标量函数 Φ 使得 $\boldsymbol{V}=\nabla\Phi$，$\Phi$ 称为速度势；代入上式，得到全速势方程。

在部件空气动力学中，一般采用直角坐标系描述弹翼绕流，速度矢量：

$$\boldsymbol{V}=[u,v,w]=\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x},\frac{\partial\Phi}{\partial y},\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right]$$

得到全速势方程形式：

$$(a^2-u^2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+(a^2-v^2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+(a^2-w^2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}-2uv\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}-2vw\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z}-2uw\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z}=0 \tag{1.19}$$

采用柱坐标系描述弹体绕流，速度矢量：

$$\boldsymbol{V}=[V_r,V_\theta,V_x]=\left[\frac{\partial\Phi}{\partial r},\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta},\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right]$$

全速势方程表达式为：

$$(a^2-V_r^2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+(a^2-V_\theta^2)\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}+(a^2-V_x^2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-2V_rV_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial\theta}-2V_rV_x\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial x}-2V_\theta V_x\frac{1}{r}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta\partial x}+\frac{V_r}{r}(a^2+V_\theta^2)=0 \tag{1.20}$$

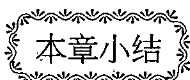
尽管全速势方程比 Euler 方程简单许多，但是它是一个非线性方程，还难以直接得出解析解，需要采用数值解方法，以其为基础的计算流体力学应用软件目前仍广泛应用于民用飞机的气动设计。应用表明，在流场中激波不太强时，全速势方程是 Euler 方程的很好近似。

对于不可压缩流动，如果流场内速度连续、无旋，直接把速度势 Φ 代入质量方程，得到全速势方程：

$$\Delta\Phi = 0 \tag{1.21}$$

由于有速度变化的粘性流动大多是有旋的，因此有些书上经常在"无粘、定常、无旋、不可压"条件下引用全速势方程(1.21)式，实际上仅仅需要"无旋、不可压"就可以推导出。

如果不采用计算流体力学方法对以上偏微分方程(1.20)式或(1.21)式进行差分离散近似，而是根据流动现象机理增加更多的约束条件，在全速势方程基础上进一步简化，直到能够给出飞行器绕流速势解析形式，或者给出速势解的近似表达形式；在这一研究中，逐步形成较为完整的理论体系，就形成了部件空气动力学。



学习气动很重要，研究手段有三招；
先零后整组拆法，部件空气动力学。

习 题

1-1 气动力研究在飞行器设计中很重要，建立气动力模型有哪些难点？

1-2 研究飞行器气动力主要有哪些方法？各有什么特点？

1-3 简单说明部件组拆法的基本思路。

1-4 从完全气体的可压缩 NS 方程出发，引入那些假设条件得到部件组拆法的理论基础全速势方程？

1-5 从完全气体的不可压缩 NS 方程出发，推导全速势方程。

1-6 已经学习过的与飞行器相关的学科中，有哪些坐标系？写出定义。

1-7 画出弹体坐标系和气流坐标系，标明关联角的名称。

第二章　低速流动中薄翼线化理论

§2.1　机翼几何形状相关术语

仰视在蓝天飞行的飞机时，所看到的体现飞机特征的机翼有多种形状，如图 2.1 所示，常见的有矩形翼、梯形翼、椭圆翼、后掠翼、三角翼、S 形前缘翼、双三角翼、可变翼、拐折翼等。

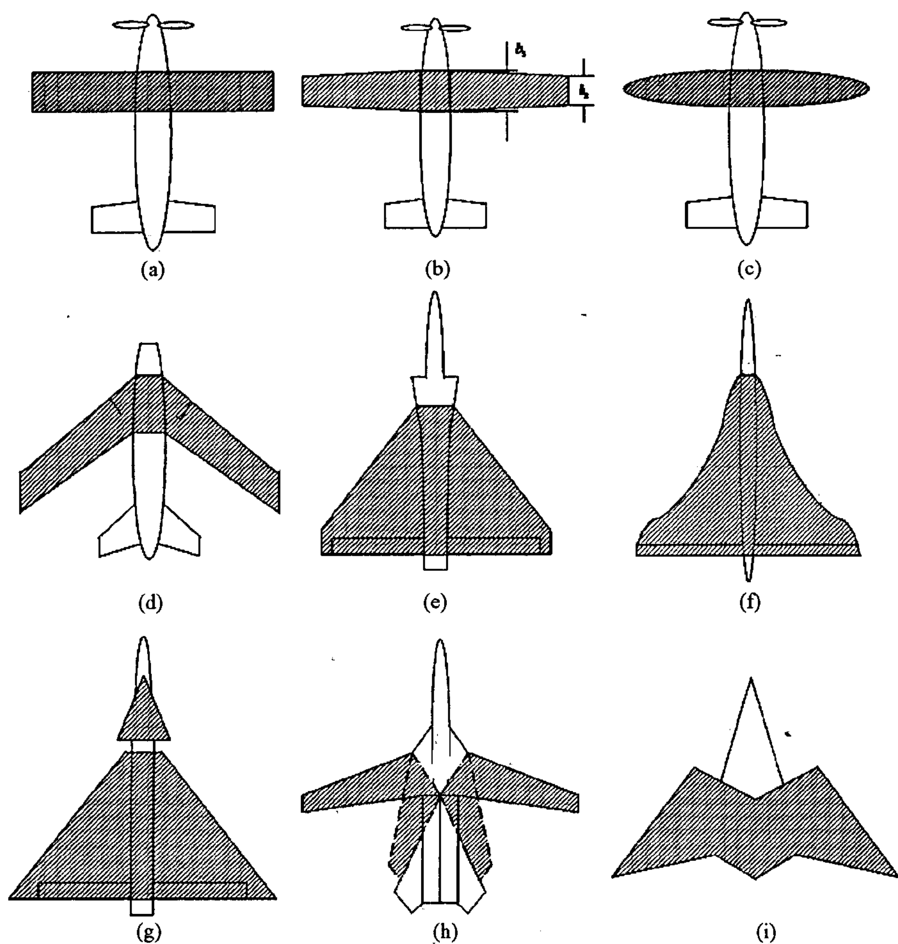
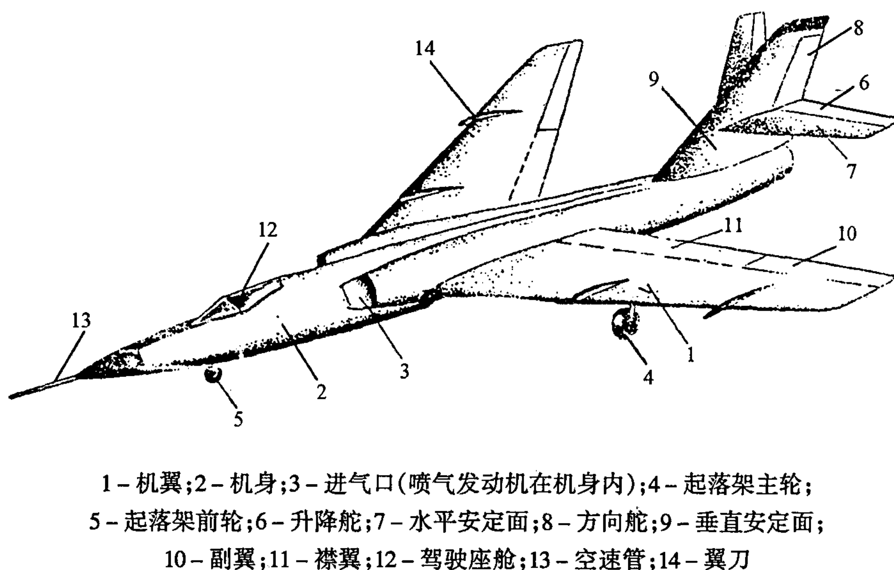


图 2.1　常见的机翼形状

大部分飞行器的升力和控制力是由机翼产生,机翼是飞行器最重要的部件,也是部件空气动力学主要研究对象。机翼形状是决定飞机性能的重要因素,在进行飞行器外形基本设计时,需要根据总体要求慎重选择机翼;如果选择不好,就设计不出优良的飞行器,甚至会造成事故。例如,要求续航力强的飞机,常用展弦比大的机翼,但若把展弦比搞得过大又引出严重的气动弹性问题,无谓地增加结构重量;关于后掠角也是一样,如果忽视发动机的推力和巡航飞行速度,只为了外表呈现流线型而采用后掠翼,那么除对飞行性能无益处,还带来低速品质不好的缺点。

图 2.2 为飞机在飞行运动过程中与空气接触产生气动力的主要部件。如此复杂外形绕流可以采用经典流体力学 Navier - Stokes 方程描述,大部分情况下无法找到这组非线性偏微分方程组的解,因此难以应用于工程问题。为了建立快速、高效、能够用于工程设计的气动力模型,需要根据各个部件对整个飞机气动力的影响大小,分清主次,抓住主要元素,忽略次要元素;部件空气动力学研究中采用这种解决问题的思想和方法,在流体控制方程简化的同时,对飞行器外形也进行简化。



1 - 机翼;2 - 机身;3 - 进气口(喷气发动机在机身内);4 - 起落架主轮;
5 - 起落架前轮;6 - 升降舵;7 - 水平安定面;8 - 方向舵;9 - 垂直安定面;
10 - 副翼;11 - 襟翼;12 - 驾驶座舱;13 - 空速管;14 - 翼刀

图 2.2 飞机与气动力相关的主要部件

部件简化大致分为三种情况,一种是在正常巡航飞行中不使用的部件,如起落架、操纵舵等;其次是简化方程无法描述的部件,如进气道等;还有就是对整个飞机气动力贡献较小的部件,如空速管、翼刀等。经过简化的飞机外形主要包括“干净”的机翼和“光洁”的机身,这样的机翼和机身就是部件空气动力学主要的研究对象。

在几十年的机翼设计过程中,形成一系列的概念和专业术语,下面介绍与机翼形状相关的术语。

飞行器机体两侧可以看到的机翼(wing)称为外露机翼(exposed wing),忽略掉一些边条翼、翼刀、翼梢小翼、涡流发生器等辅助小部件以后称为基本外露机翼(basic wing),把两侧基本外露机翼对接起来就是部件组拆法所研究的机翼。在研究翼身组合体时,有时还

涉及毛机翼(gross wing)概念,是指包含假想的延伸到机体空间部分的机翼。

机翼一般是对称布局,对称面称为机翼参考面;平行于参考面的平面与机翼截成的剖面称为翼型(airfoil);连接翼型中弧线(定义在后面介绍)前后端点的直线称为弦线(wing chord),它是翼型的一条基准线;对称面内的弦线为机翼参考线;对称面内弦线前端点为机翼参考点,坐标系原点位于机翼参考点。

在第一章介绍了飞行器动力学坐标系的国家标准,但是目前在空气动力学研究领域很少使用,可能的原因是常规气动力描述与飞行器质心、质量和转动惯量等物理特性无关。部件空气动力学中研究单独机翼部件时,习惯上采用如下两种坐标系。

1. 弹体坐标系(body axis system),简称体轴系,记为 $Ox_by_bz_b$,或说明以后直接采用 $Oxyz$。定义如下:坐标系原点位于机翼参考点;x 轴取机翼参考线,指向飞行器尾部;y 轴在机翼参考面内垂直于 x 轴,指向上方;z 轴根据右手坐标系法则确定,指向左方。

2. 气流坐标系(air-path system),简称风轴系,记为 $Ox_ay_az_a$,或说明以后直接采用 $Oxyz$。定义如下:坐标系原点位于机翼参考点;x 轴取为气流矢量方向;y 轴在机翼参考面内垂直于 x 轴,指向上方;z 轴根据右手坐标系法则确定,指向左方。

定义迎角(α)、侧滑角(β)和滚转角(γ)以后,就可以写出体轴系与风轴系之间转换矩阵。本书主要研究飞行器沿航向等速飞行时纵向气动力特性,即不考虑侧滑角和滚转角影响($\gamma=\beta=0$);因此,体轴系与风轴系坐标之间通过迎角(angle of attack)相互转换,关系如下:

$$\left.\begin{aligned} x_a &= x_b\cos\alpha + y_b\sin\alpha \\ y_a &= y_b\cos\alpha - x_b\sin\alpha \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

值得注意的是,在研究机翼时,迎角定义为机翼参考线与飞行速度矢量在机翼参考面内投影的夹角,抬头为正;飞行器迎角一般定义为飞行速度矢量在飞行器纵对称平面上投影与机体坐标 x 轴的夹角;由于机翼参考线不一定是整个飞行器的基准线,因此机翼迎角与飞行器迎角不完全一致。

如图 2.3 示意,在体轴系下机翼外形轮廓线在机翼基本平面(xoz)的投影称为机翼平面形状,由前缘、侧缘和后缘组成。机翼平面形状在轴投影长度,即两个翼梢之间的距离,称为翼展(wing span),常用符号 l 表示;给定展向位置翼剖面对应的翼型的弦线称为当地翼型弦线,弦长常用符号 $b(z)$ 表示;机翼参考面内翼弦称为翼根弦[$b_0=b(0)$];翼梢的翼弦称为翼梢弦[$b_1=b(l/2)$];$\eta=b_0/b_1$ 称为根梢比(taper ratio),一般机翼根梢比范围 $\eta=1\sim\infty$,有些文献采用梢根比 $\xi=b_1/b_0$ 表示。

当地翼弦的弦长 $b(z)$ 已知,可得机翼平面形状的面积:

$$S = 2\int_0^{l/2} b(z)\mathrm{d}z$$

机翼面积除以翼展 l 称为几何平均弦长(mean geometric chord),用 b_{pj} 表示,其含义是采用与原机翼面积和翼展相同的矩形机翼所对应的弦长;翼展与几何平均弦长的比值称为展弦比(aspect radio),常用 $\lambda=l/b_{pj}=l^2/S$ 表示,这是一个表示机翼细长程度的量,对飞机性能有很大的影响,一般机翼 $\lambda=2\sim12$。

除了以上在机翼基本平面(xoz)定义的术语外,在机翼部件研究中还有几何扭转角、上反角、机翼安装角等。

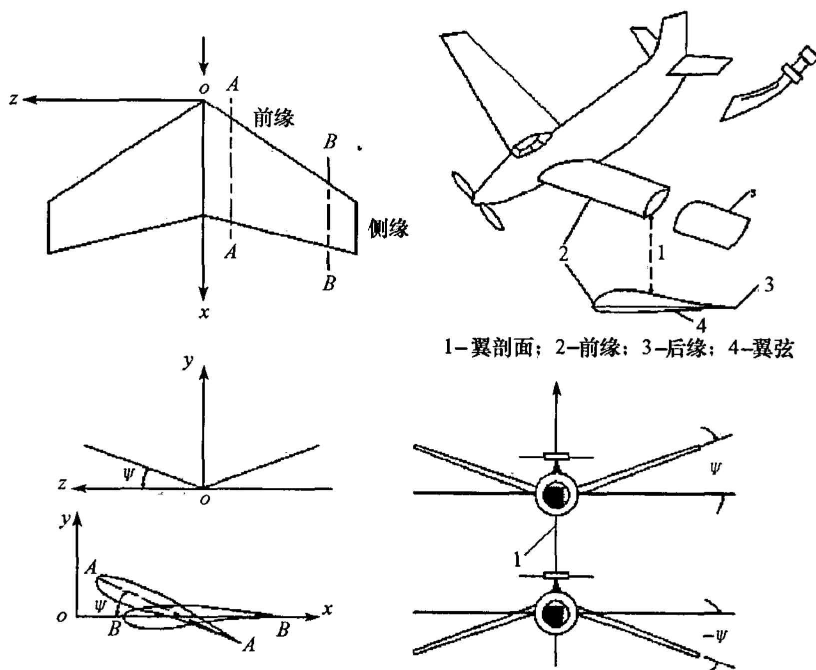


图 2.3　体轴系下机翼几何参数示意图

几何扭转角是当地翼型弦线与基本平面 xoz 的夹角,设计中沿翼根向翼梢几何扭转角平缓变化,所以实际工程应用中常用 b_1 与 b_0 对应的两根弦线之间的夹角表征;如果相对于气流,b_1 对应的弦线迎角大于 b_0 对应的弦线迎角,几何扭转角为正;沿翼根向翼梢几何扭转角逐步减小,称为外洗布局,反之称为内洗布局。在机翼与机体进行组合时,翼根弦 b_0 与飞行器的基准轴线夹角称为机翼安装角。即使没有扭转角的机翼,当地翼弦 $b(z)$也可能不落在 xoz 内,如果翼稍位于翼根所在的基本平面上方,称为上反机翼布局,用上反角表示;如果翼稍位于翼根所在的基本平面下方,称为下反机翼布局,用下反角表示;工程中采用统一的符号 Ψ 表示上反角和下反角,规定上反为正,下反为负,常见机翼取值范围 $\Psi = -3° \sim +7°$。

当地翼弦等百分比点的连线投影到机翼基本平面上,与 z 轴夹角称为后掠角(wing swept angle,χ),表示展向不同位置上翼型沿 x 轴的相对位移,规定沿流向为正。常用的有前缘后掠角 χ_0、四分之一弦线后掠角 $\chi_{0.25}$、二分之一弦线后掠角 $\chi_{0.5}$和后缘后掠角 χ_1。图 2.4 标出常见几种机翼的后掠角。

随着飞行器速度越来越快,为减少阻力,总的趋势是后掠角越来越大;但是,有个别飞机为了提高机动性,采用负的后掠角。

机翼气动力特性与翼型有密切关系,下面介绍与翼型几何形状有关的术语。

如图 2.5 所示意,翼型上下对应点连线的中点构成翼型中弧线(airfoil mean line),确定

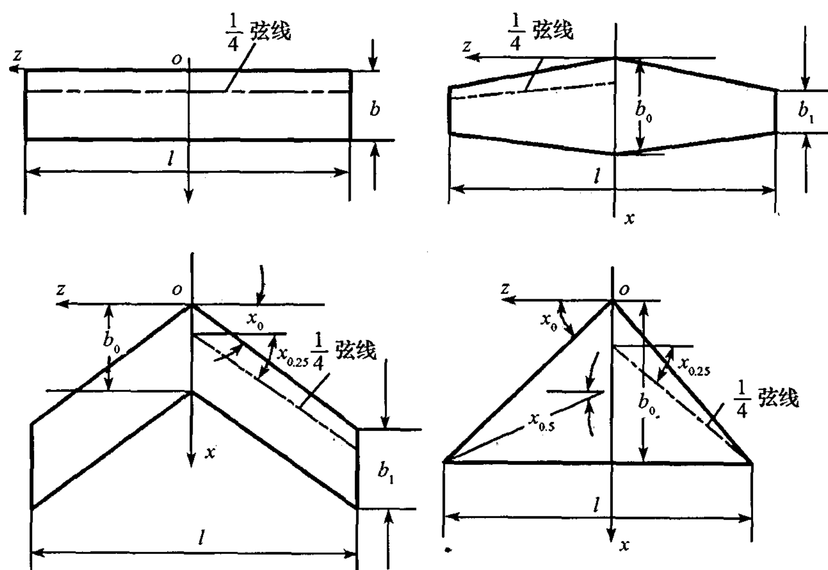


图 2.4 常见机翼后掠角

中弧线主要有如下方法:一种是沿着翼型弦线画出和上下表面内切圆的圆心连线;另一种是沿弦线作垂直线,把这些直线线段中的点光滑地连接起来,对于弯度不太大的翼剖面,这个方法简单,而且也满足要求,工程中常用。翼型在前缘点附近的外形多是圆弧形的,其前部最小内切圆的半径称为前缘半径;翼型后缘处上下两弧线切线的夹角叫后缘角。

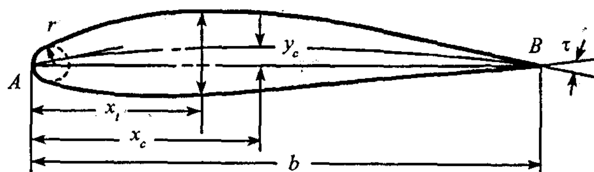


图 2.5 翼型的主要几何参数

上下翼面与中弧线垂线的交点之间的距离称为厚度,本文采用 y_t 表示厚度的一半,中弧线与弦线偏差称为弯度,采用 y_c 表示;对于具体翼型,y_t 和 y_c 表示成以前缘为原点、沿弦线方向长度为变量的曲线方程;工程中有时采用弦线作为参考长度来表示相对厚度曲线方程 $\bar{y}_t$ 和相对弯度曲线方程 $\bar{y}_c$,在此基础上,定义最大相对厚度 $\bar{t}_{max}$、最大相对弯度 $\bar{c}_{max}$、最大相对厚度位置 $\bar{x}_t$ 和最大相对弯度位置 $\bar{x}_c$。

除了前缘点附近圆弧形,沿弦向采用与中弧线相垂直分布厚度,就得到翼型上下翼面曲线方程;由于中弧线与弦线夹角很小,工程上有时直接采用如下近似计算:

$$\left.\begin{aligned} y_u(x) \approx y_c(x) + y_t(x) \\ y_l(x) \approx y_c(x) - y_t(x) \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

§2.2 机翼相关的气动力术语

除了飞行速度较小、体积较大的飞艇等飞行器设计时需要考虑静浮力外，一般飞行器在空气中受到的静浮力与空气动力相比非常小，可以忽略。

在风轴系下，纵向气动特性分别为升力(lift)、阻力(drag)和俯仰力矩(pitching moment)，工程应用中常用无量纲的系数表述，根据国标，采用如下符号表示：

$$C_L = \frac{F_y}{q_\infty \cdot S} \qquad C_D = \frac{F_x}{q_\infty \cdot S} \qquad C_{mz} = \frac{M_z}{q_\infty \cdot S \cdot b_A}$$

式中，F_y，F_x，M_z 为机翼的升力、阻力和俯仰力矩；S 为参考面积；$q_\infty = \frac{1}{2}\rho_\infty \cdot u_\infty^2$ 称为来流动压头(dynamic pressure)；b_A 称为气动平均弦(mean aerodynamic chord, MAC)，根据下式求出：

$$b_A = \frac{2}{S}\int_0^{l/2} b^2(z)\mathrm{d}z$$

下面介绍气动平均弦所对应的物理意义。

下一章翼型线化理论可以证明，对于小迎角低速飞行条件下的薄翼，升力随迎角线性变化，随着迎角增加升力也增加，但是相对前缘 1/4 弦线点上的力矩不变，这一点叫做翼型的焦点(aerodynamic centre，x_F)。根据理论力学原理，绕流作用在翼型上总的气动力可用位于焦点的升力和围绕这点的俯仰力矩来代替。同样，对于机翼而言，气动力也可以用一个力和一个力矩来代替，但是对于平面形状非矩形的机翼，如何选择力矩参考点 x_F？

假如机翼沿翼展向每一个翼型剖面相似、各剖面流动互不干扰，那么，在无量纲以后翼型升力系数等于机翼的升力系数，机翼的升力等于翼型的升力沿翼展向的积分；在求机翼俯仰力矩时，由于每一个翼型剖面的焦点可以不在同一条直线上，因此需要根据如下关系得到机翼焦点：

$$C_L \cdot q_\infty \cdot S \cdot x_F = 2\int_0^{l/2} C_L \cdot q_\infty \cdot \left[x_0(z) + \frac{1}{4}b(z)\right] \cdot b(z)\mathrm{d}z \tag{2.3}$$

式中 $x_0(z)$为前缘曲线，这样机翼的焦点：

$$\begin{aligned} x_F &= \frac{2}{S}\int_0^{l/2} \cdot \left[x_0(z) + \frac{1}{4}b(z)\right] \cdot b(z)\mathrm{d}z \\ &= \frac{2}{S}\int_0^{l/2} x_0(z) \cdot b(z)\mathrm{d}z + \frac{1}{2S}\int_0^{l/2} b^2(z)\mathrm{d}z \end{aligned}$$

上式中第二项记为：

$$x_{F0} = \frac{1}{2S}\int_0^{l/2} b^2(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{4}b_A \tag{2.4}$$

正好是一个面积与原来机翼相等、弦长为 b_A、前缘 $x_0(z) = 0$ 的矩形机翼的焦点；如果把这个矩形机翼前缘放在原来机翼顶点以下的位置：

$$x_A = \frac{2}{S}\int_0^{l/2} x_0(z) \cdot b(z)\mathrm{d}z \tag{2.5}$$

那么矩形机翼的焦点为：$x_{F0}+x_A=x_F$，与原来机翼气动力和力矩相等；因此为工程便于分析讨论任意形状机翼气动力作用点，引入气动平均弦概念。这几个点相对位置如图2.6所示意。

根据定义，一个机翼的气动平均弦 b_A 和几何平均弦 b_{pj}，所对应的均为矩形机翼，但是二者形状不同，面积也可能不同。

上面机翼的焦点位置推导过程中假设沿翼展方向各个翼型气动力特性没有相互干扰，而且翼型的焦点位置都在1/4弦长处；这些假设对大展弦比直机翼相对较为准确，但是对后掠机翼和小展弦比机翼来说，有明显差异，实际机翼的焦点位置比上述理论结果靠后些。工程中要精确确定后掠机翼的焦点位置，可以采用升力面理论进行预测；确定小展弦比机翼的焦点位置主要依靠实验。

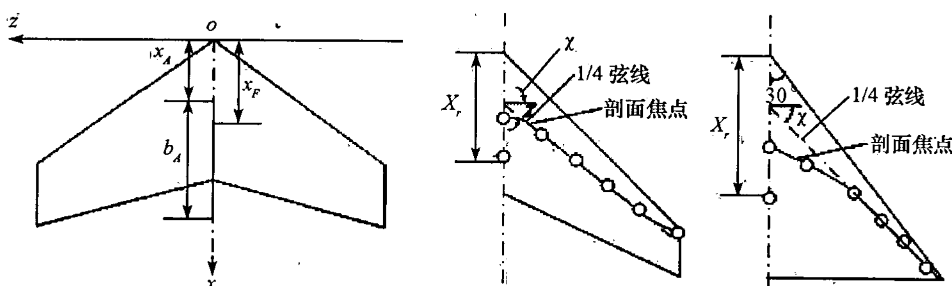


图2.6　机翼气动平均弦、焦点示意图

在体轴系下，纵向气动特性分别称为法向力(normal force)、轴向力(axial force)和俯仰力矩(pitching moment)，根据国标，系数表述采用如下符号表示：

$$C_N=\frac{F_y}{q_\infty\cdot S}\qquad C_A=\frac{F_x}{q_\infty\cdot S}\qquad C_{mz}=\frac{M_z}{q_\infty\cdot S\cdot b_A}$$

体轴系和风轴系的俯仰力矩相等，两个坐标系下气动力系数之间关系如下：

$$C_L=C_N\cos\alpha-C_A\sin\alpha$$

$$C_D=C_N\sin\alpha+C_A\cos\alpha$$

§2.3　不可压速度势理论及其基本解

在无粘条件下，如果流动速度与声速相比很小，根据相似准则分析，可以不考虑流体密度引起的流场参数变化，就得到不可压 Euler 方程，这时如果流场内速度连续、无旋，飞行器绕流可以采用速度势函数的 Laplâce 方程来描述：

$$\Delta\Phi=0\tag{2.6}$$

在风轴系下，在物体上游无穷远处，认为流动没有受到干扰，远场边界：

$$\Phi=u_\infty x\tag{2.7}$$

无粘流动不考虑物体表面对接触流体微团的摩擦阻滞作用，允许流体微团沿着物面滑移，

但是没有流体微团能够穿透固体表面，即流体相对于固体表面的法向速度为零；边界条件表示为：

$$(\boldsymbol{V}-\boldsymbol{V}_s)\cdot\boldsymbol{n}=0 \tag{2.8}$$

这里 $\boldsymbol{V}_s$ 是物体表面运动速度，对于定常流动，则 $\boldsymbol{V}_s=0$。

飞行器外形确定以后，固体表面的法向单位矢量是确定的；如果已知物体表面方程 $y_w=f(x,z)$，则固体表面的法向单位矢量：

$$\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial y_w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y_w}{\partial z}\right)^2+1}}\left(-\frac{\partial y_w}{\partial x},1-\frac{\partial y_w}{\partial z}\right) \tag{2.9}$$

对于 Laplace 方程，直接给出边界上势函数 Φ 值作为定解条件称为 Dirichlet 问题，给出边界上势函数的梯度 $\partial\Phi/\partial n$ 作为定解条件称为 Lieman 问题。根据数理方程理论，在 Lieman 问题中 $\partial\Phi/\partial n=0$，解存在、不唯一；因此仅仅满足以上边界条件的解不唯一，在机翼后缘还需要满足 Kutta – Joukowski 条件（唯一性条件）：

气流顺滑地离开机翼后缘；后缘附近的速度保持为有限值；机翼后缘处上下表面的压力相等；以上三种说法是互相等价的。

Kutta – Joukowski 条件也适用于亚声速流中的尖后缘；而且也适用于超声速流动中的亚声速尖后缘。在超声速后缘处这个条件自动满足。在机翼上的涡延伸到下游产生尾涡面，在尾涡面上 Kutta – Joukowski 条件作为无旋流场的边界条件。

在给定以上边界条件以后，速度势方程(2.6)式的解存在且唯一；解出速度势 Φ，得到速度 $\boldsymbol{V}=\nabla\Phi$，代入 Bernoulli 方程：

$$0.5\rho|\nabla\Phi|^2+p=0.5\rho u_\infty^2+p_\infty=\text{constant}$$

可以求出物体表面压力分布 p，积分获得气动力：

$$\boldsymbol{F}=-\oiint_s p\cdot\boldsymbol{n}\cdot\mathrm{d}\sigma,\qquad \boldsymbol{M}=-\oiint_s(p\cdot\boldsymbol{n})\times\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\sigma$$

尽管 Laplace 方程是数学中较为简单的偏微分方程，但是对于常见飞行器外形还没有通解表达式，到目前仅仅找到几个与流动相对应的解析表达式，在流体力学中称为基本解。下面介绍常用的几种基本解。

仅有 x 方向速度 u_∞ 的均匀流动速度势为：$\Phi(x,y,z)=u_\infty x$；在体轴系下均匀流动速度势为：$\Phi=u_\infty x\cdot\cos\alpha+u_\infty y\cdot\sin\alpha$。

位于点(ξ,η,ζ)处强度为 Q 的点源在流场空间点(x,y,z)处的速度势为：

$$\Phi(x,y,z)=\frac{-Q}{4\pi\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}=\frac{-Q}{4\pi r} \tag{2.10}$$

点源(source flow)的物理含义是，在单位时间从点(ξ,η,ζ)沿半径无穷小的球面以法向速度无穷大向外流出质量为 $Q>0$ 的流体；如果 $Q<0$ 表示向点(ξ,η,ζ)汇聚，称为点汇(sink flow)；等位面是点(ξ,η,ζ)为中心的同心球面；点源(ξ,η,ζ)处流场出现奇性，速度无穷大，不存在速度势。

得到流场速度势以后，可以知道流场内速度 $\boldsymbol{V}=\nabla\Phi$，根据流线定义：

$$\frac{\mathrm{d}x}{u}=\frac{\mathrm{d}y}{v}=\frac{\mathrm{d}z}{w} \tag{2.11}$$

可以画出流线，一系列相邻的流线组成流面；流线任意点切线方向与该点速度矢量方向一致，因此流体不可穿越流面，即在流面上法向速度为零，与飞行器表面的边界条件一样，所以在存在速度势不可压流场内，飞行器表面形状可以用流面代替。利用这一特性，可以通过基本解的线性叠加得到几种物体外形对应的速度势解析表达式。如图 2.7 示意，x 方向均匀流动和位于 x 轴上点源叠加形成的流动，其中经过 S 点的流面把流场分为内外两部分。如果头部为钝体、长度无限的旋转体表面形状与该流面相同，放置在同样的 x 方向均匀流动中，形成的速度势满足 Laplace 方程，在旋转体表面满足的边界条件与流面也一样；根据 Laplace 方程解的唯一性理论，可以证明均匀流动和点源叠加以后在经过 S 点流面形成外流场的速度势，就是旋转体在均匀流动中引起的速度势。在图 2.7 中，还给出 x 方向均匀流动和位于 x 轴上等强度上游点源、下游点汇叠加以后形成的部分流场内流线示意图，在封闭曲面外部流场的速度势，与椭球型钝体放置在均匀流动中引起的速度势等价。上游点源和下游点汇之间的距离增大，或者源汇的强度较小，椭球形状会变得更加扁长，像飞机或导弹的弹身。

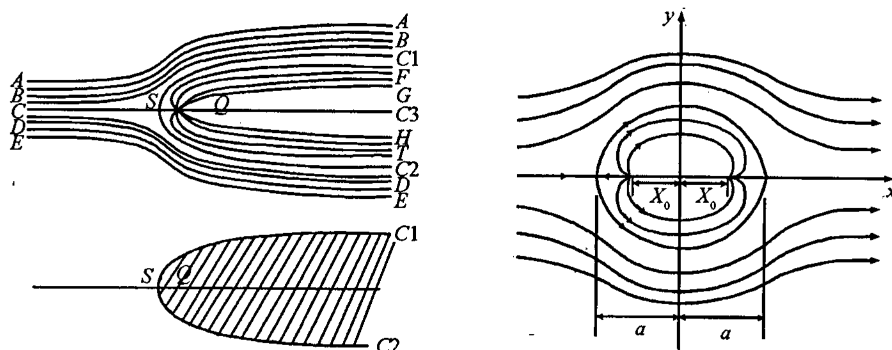


图 2.7　均匀流动与点源叠加均匀流动与点源、点汇叠加

以图 2.7 中无限长钝体、椭球型钝体外形是由源汇的强度决定的，对于更为常见的情况是处理给定外形飞行器产生的速度势，一般难以通过布置有限的源汇等价代替，常常需要在连续曲线和曲面上分布线源或面源。

沿曲线连续分布单位长度源强度为 $\sigma(\xi,\eta,\zeta)$ 的速度势：

$$\Phi(x,y,z)=\int_L \frac{-\sigma(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}l}{4\pi\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}=\int_L \frac{-\sigma(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}l}{4\pi r} \tag{2.12}$$

在曲面连续分布、单位面积源强度为 $\sigma(\xi,\eta,\zeta)$ 的速度势：

$$\Phi(x,y,z)=\oiint_S \frac{-\sigma(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}s}{4\pi\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}=\oiint_S \frac{-\sigma(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}s}{4\pi r} \tag{2.13}$$

采用直接代入，可以证明以上表达式满足速度势方程。

根据流量和速度的关系，在分布源的曲面上法向($\boldsymbol{n}$)速度存在间断，两侧速度差：$V_{n+} - V_{n-} = \sigma(x,y,z)$，进一步根据源的对称特性，推导出源点对自身所在位置，即$(\xi,\eta,\zeta) = (x,y,z)$处的切向速度为零，法向速度与当地源强度之间：

$$V_{n+} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_+ = \frac{\sigma(x,y,z)}{2}$$

$$V_{n-} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_- = -\frac{\sigma(x,y,z)}{2}$$

如果强度相等点源和点汇在保持强度和距离的乘积不变的情况下无限接近，就产生所谓的偶极子流动(doublet flow)。位于点(ξ,η,ζ)处强度为 M、方向为 $\boldsymbol{n}$(点汇指向点源)的偶极子在流场空间点(x,y,z)处的速度势为：

$$\Phi(x,y,z) = \frac{M}{4\pi}\left[\boldsymbol{n} \cdot \nabla\left(\frac{1}{r}\right)\right] = \frac{M}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{4}\right) \tag{2.14}$$

这里 $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$。

在数学上偶极子就是点源的速度势关于 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数。例如，位于坐标原点、指向 $-y$ 轴方向偶极子的速度势为：

$$\Phi(x,y,z) = \frac{M \cdot y}{4\pi\sqrt{[x^2+y^2+z^2]^3}} = \frac{M \cdot y}{4\pi r^3}$$

在曲面连续分布、单位面积强度为 $\tau(\xi,\eta,\zeta)$偶极子的速度势：

$$\Phi(x,y,z) = \oiint_S \frac{\tau(\xi,\eta,\zeta)}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}s \tag{2.15}$$

在 $r \to 0$ 时，分布偶极子两侧速度势：

$$\begin{aligned}\Phi_+ - \Phi_- &= \left[\oiint_S \frac{\tau(\xi,\eta,\zeta)}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}s\right]_+ - \left[\oiint_S \frac{\tau(\xi,\eta,\zeta)}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}s\right]_- \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial n}\oiint_S \frac{\tau(\xi,\eta,\zeta)}{4\pi}\frac{1}{r}\mathrm{d}s\right]_+ - \left[\frac{\partial}{\partial n}\oiint_S \frac{\tau(\xi,\eta,\zeta)}{4\pi}\frac{1}{r}\mathrm{d}s\right]_-\end{aligned}$$

方括号内正好是单位面积源强度为 $-\tau(\xi,\eta,\zeta)$的速度势表达式，因此偶极子对自身所在位置两侧速度势的间断量：

$$\Phi_+ - \Phi_- = -(V_{n+} - V_{n-}) = -\tau(x,y,z)$$

如果流场中存在涡线，无旋假设 $\nabla \times \boldsymbol{V} = 0$ 除了涡线以外的空间都成立，称为兰金涡核模型；位于点(ξ,η,ζ)处、强度为 Γ 的微段涡线 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 在无旋流场空间点(x,y,z)产生的诱导速度服从“Biot - Savart law”公式：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \cdot \frac{\boldsymbol{r} \times \mathrm{d}\boldsymbol{s}}{|\boldsymbol{r}|^3} \tag{2.16}$$

从公式中可以看出，如果涡线是直线，那么涡线上任意微段对位于涡线上的其他部分不产生诱导速度；如果涡线是曲线，那么涡线一段微涡会对位于涡线上的其他部分的流体产生诱导速度，相互作用引起弯曲涡线自身运动和变形。

对于图 2.8 所示的 AB 涡线，根据式(2.16)计算空间任意点 $P(x,y,z)$诱导速度：

$$\boldsymbol{V}_{AB} = \frac{\Gamma}{4\pi}\int_{R_A}^{R_B} \frac{(\boldsymbol{R}' - \boldsymbol{R}_P) \times \mathrm{d}\boldsymbol{s}}{|\boldsymbol{R}' - \boldsymbol{R}_P|^3} \tag{2.17}$$

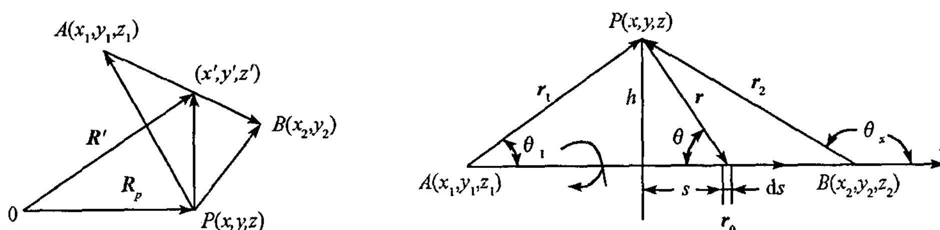


图 2.8　计算直线涡段的诱导速度的示意图

采用在 ABP 平面内描述方式来求解上式的积分，这时诱导速度方向垂直于 ABP 平面向外。为便于计算，定义新的矢量：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{R}'-\boldsymbol{R}_P,\quad \boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{R}_B-\boldsymbol{R}_A,\quad \boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{R}_P-\boldsymbol{R}_A,\quad \boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{R}_P-\boldsymbol{R}_B$$

如图 2.8 右图所示意，θ 为 $\boldsymbol{r}$ 与 $\mathrm{d}s$ 的夹角，h 为 P 到 AB 的距离，有如下关系：

$$|\boldsymbol{R}'-\boldsymbol{R}_P|=\frac{h}{\sin\theta},\quad s=\frac{h}{\tan\theta},\quad \mathrm{d}s=-\frac{h\cdot\mathrm{d}\theta}{\sin^2\theta}$$

根据矢量点积的几何意义，已知两个同平面矢量以后，可以推出夹角：

$$\cos\theta_1=\frac{\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}_0|\cdot|\boldsymbol{r}_1|},\quad \cos\theta_2=\frac{\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_0|\cdot|\boldsymbol{r}_2|}$$

同样，从矢量叉积的几何意义，可以推出积分 (2.17) 式中矢量的大小：

$$|\boldsymbol{r}\times\mathrm{d}\boldsymbol{s}|=|\boldsymbol{r}|\cdot\mathrm{d}s\cdot\sin\theta$$

代入(2.16)式，得到诱导速度的大小为：

$$|\boldsymbol{V}_{AB}|=-\frac{\Gamma}{4\pi h}\int_{\pi-\theta_1}^{\pi-\theta_2}\sin\theta\cdot\mathrm{d}\theta=\frac{\Gamma}{4\pi h}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)\tag{2.18}$$

如果直线涡线端伸展到无穷远，扰动速度为：

$$|\boldsymbol{V}_{A\infty}|=\frac{\Gamma}{4\pi h}(\cos\theta_1+1)$$

如果直线涡线两端伸展到无穷远，扰动速度为：

$$|\boldsymbol{V}_{\infty}|=\frac{\Gamma}{2\pi h}$$

考虑到关系式：$|\boldsymbol{r}_0\times\boldsymbol{r}_1|=|\boldsymbol{r}_0|\cdot h$，又知涡线诱导速度方向与矢量 $\boldsymbol{r}_0\times\boldsymbol{r}_1$ 的方向一致，(2.18)式写为向量形式：

$$\boldsymbol{V}_{AB}=\frac{\Gamma}{4\pi}\frac{\boldsymbol{r}_0\times\boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}_0\times\boldsymbol{r}_1|^2}\left(\frac{\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}_1|}-\frac{\boldsymbol{r}_0\times\boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_2|}\right)\tag{2.19}$$

在无粘流中涡服从 Helmholtz 定理，沿涡线强度不变；涡线不能中止于流体内部，只能中止于边界或无穷远处。存在速度势的无旋流场中的 AB 涡线只能从无穷远处指向 A 点，然后从 B 点指向无穷远处，如图 2.9 所示，AB 涡线在 A 点和 B 点发生直角拐折指向无穷远处，且这三条直线在一个平面内，这形成所谓马蹄涡(horseshoe vortex)，沿马蹄涡强度不变。根据 Stokes 定理和 Kutta - Joukowsky 定理，均匀流场内涡线产生的升力：$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{\Gamma}$，因此采用涡线等价产生升力的机翼。研究中把布置在机翼位置、产生升力的 AB 涡线称为附着涡，从 A 点和 B 点指向无穷远处的涡线与来流平行，对升力没有贡献，称为自由

涡。

下面推导自由涡指向 x 轴正向的马蹄涡引起的扰动速度。

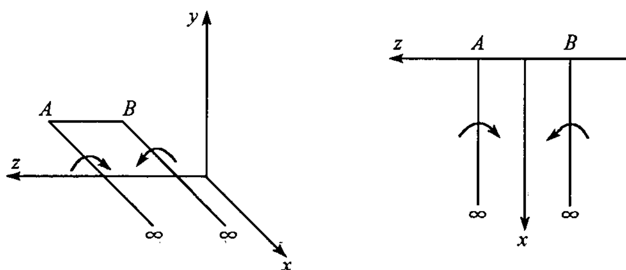


图 2.9　计算马蹄涡的诱导速度的示意图

相对原点矢量的坐标：

$$\boldsymbol{R}_p=(x,y,z),\boldsymbol{R}_A=(x_1,y_1,z_1),\boldsymbol{R}_B=(x_2,y_2,z_2)$$

代入(2.20)得到速度矢量：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}_{AB}=\frac{\Gamma}{4\pi}\{&[(y_1-y)(z_2-z)-(z_1-z)(y_2-y)]\cdot\boldsymbol{i}\\&+[(z_1-z)(x_2-x)-(x_1-x)(z_2-z)]\cdot\boldsymbol{j}\\&+[(x_1-x)(y_2-y)-(y_1-y)(x_2-x)]\cdot\boldsymbol{k}\}\cdot K\end{aligned}\tag{2.20}$$

式中：

$$K=\frac{K_1-K_2}{K_3}$$

$$K_1=\frac{(x_2-x_1)(x-x_1)+(y_2-y_1)(y-y_1)+(z_2-z_1)(z-z_1)}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}}$$

$$K_2=\frac{(x_2-x_1)(x-x_2)+(y_2-y_1)(y-y_2)+(z_2-z_1)(z-z_2)}{\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2}}$$

$$\begin{aligned}K_3=\{&[(y_1-y)(z_2-z)-(z_1-z)(y_2-y)]^2+[(z_1-z)(x_2-x)-(x_1-x)(z_2-z)]^2\\&+[(x_1-x)(y_2-y)-(y_1-y)(x_2-x)]^2\}\end{aligned}$$

对于强度为 Γ 的马蹄涡，可以利用以上公式，取直线段伸展到无穷远则可；假设自由涡分别从两个点 AB 拖出从 x 正方向伸展到 $+\infty$，自由涡不产生 x 方向速度，从 $+\infty$ 到 A 产生的诱导速度分量为：

$$u_{A\infty}=0$$

$$v_{A\infty}=\frac{\Gamma\cdot(z-z_1)}{4\pi[(y-y_1)^2+(z-z_1)^2]}\left[1+\frac{x-x_1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}}\right]$$

$$w_{A\infty}=\frac{-\Gamma\cdot(y-y_1)}{4\pi[(y-y_1)^2+(z-z_1)^2]}\left[1+\frac{x-x_1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}}\right]$$

从 B 到 $+\infty$ 产生的诱导速度分量为：

$$u_{B\infty}=0$$

$$v_{B\infty}=\frac{-\Gamma\cdot(z-z_2)}{4\pi[(y-y_2)^2+(z-z_2)^2]}\left[1+\frac{x-x_2}{\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2}}\right]$$

$$w_{B\infty}=\frac{\Gamma\cdot(y-y_2)}{4\pi[(y-y_2)^2+(z-z_2)^2]}\left[1+\frac{x-x_2}{\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2}}\right]$$

整个马蹄涡 $P(x,y,z)$处扰动速度是以上三个直线涡诱导速度之和：

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}_{AB}+\boldsymbol{V}_{A\infty}+\boldsymbol{V}_{B\infty}$$

在以后讲到的升力面计算中，习惯上采用速度无量纲，整理成如下形式：

$$\left.\begin{aligned}\frac{u(x,y,z)}{u_\infty}&=k_u(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2,x,y,z)\cdot\Gamma\\ \frac{v(x,y,z)}{u_\infty}&=k_v(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2,x,y,z)\cdot\Gamma\\ \frac{w(x,y,z)}{u_\infty}&=k_w(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2,x,y,z)\cdot\Gamma\end{aligned}\right\}\qquad(2.21)$$

其中 k_u、k_v、k_w 仅仅是位置的函数，很容易从以上推导过程中得到。

以上建立的马蹄涡扰动速度公式具有普适性，下面讨论一种特殊情况。如图 2.9 右，马蹄涡位于 xoz 平面($y_1=y_2=0$)、涡线 AB 平行于 z 轴($x_1=x_2$)，根据以上表达式，得到马蹄涡在空间点 $P(x,y,z)$处的扰动速度：

$$u=\frac{\Gamma}{4\pi}\frac{y}{(x-x_1)^2+y^2}\left[\frac{z-z_2}{\sqrt{(x-x_2)^2+y^2+(z-z_2)^2}}-\frac{z-z_1}{\sqrt{(x-x_1)^2+y^2+(z-z_1)^2}}\right]$$

$$\begin{aligned}v=&\frac{\Gamma}{4\pi}\frac{-(x-x_1)}{(x-x_1)^2+y^2}\left[\frac{z-z_2}{\sqrt{(x-x_2)^2+y^2+(z-z_2)^2}}-\frac{z-z_1}{\sqrt{(x-x_1)^2+y^2+(z-z_1)^2}}\right]\\&+\frac{\Gamma}{4\pi}\frac{(z-z_1)}{y^2+(z-z_1)^2}\left[1+\frac{x-x_1}{\sqrt{(x-x_1)^2+y^2+(z-z_1)^2}}\right]\\&-\frac{\Gamma}{4\pi}\frac{(z-z_2)}{y^2+(z-z_2)^2}\left[1+\frac{x-x_2}{\sqrt{(x-x_2)^2+y^2+(z-z_2)^2}}\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}w=&-\frac{\Gamma}{4\pi}\frac{y}{y^2+(z-z_1)^2}\left[1+\frac{x-x_1}{\sqrt{(x-x_1)^2+y^2+(z-z_1)^2}}\right]\\&+\frac{\Gamma}{4\pi}\frac{y}{y^2+(z-z_2)^2}\left[1+\frac{x-x_2}{\sqrt{(x-x_2)^2+y^2+(z-z_2)^2}}\right]\end{aligned}$$

强度相等点源和点汇在保持强度和距离的乘积不变的情况下无限接近，就产生所谓的偶极子流动。对于 AB 涡线组成的马蹄涡，当$|\boldsymbol{AB}|\to0$，但是$|\boldsymbol{AB}|\cdot\Gamma=\Gamma'$保持不变，这种极限情况称为基元涡。

引入函数 $f(z),g(z),h(z)$ 重写以上诱导速度表达形式：

$$u=\frac{\Gamma}{4\pi}[f(z_2)-f(z_1)]=\frac{\Gamma\cdot(z_2-z_1)}{4\pi}\frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1}$$

$$v=\frac{\Gamma}{4\pi}[g(z_2)-g(z_1)]=\frac{\Gamma\cdot(z_2-z_1)}{4\pi}\frac{g(z_2)-g(z_1)}{z_2-z_1}$$

$$w=\frac{\Gamma}{4\pi}[h(z_2)-h(z_1)]=\frac{\Gamma\cdot(z_2-z_1)}{4\pi}\frac{h(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1}$$

取 $x_1=x_2=\xi,z_1=\zeta+\mathrm{d}\zeta,z_2=\zeta$，根据基元涡性质保持 $\Gamma\cdot\mathrm{d}\zeta=\Gamma'(\xi,\zeta)$ 不变，求 $\mathrm{d}\zeta\to0$ 诱导速度的极限值，等价于求函数 $[f(\zeta),g(\zeta),h(\zeta)]$ 导数，整理以后得到 xoz 平面上点 $(\xi,0,\zeta)$ 处方向指向 z、强度为 $\Gamma'(\xi,\zeta)$ 的基元涡在任意空间点 $P(x,y,z)$ 处产生的扰动速度：

$$u(x,y,z)=\frac{\Gamma'(\xi,\zeta)}{4\pi}\frac{y}{[\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+(z-\zeta)^2}]^3}$$

$$v(x,y,z)=-\frac{\Gamma'(\xi,\zeta)}{4\pi}\left\{\frac{y^2(x-\xi)}{[y^2+(z-\zeta)^2][\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+(z-\zeta)^2}]^3}+\frac{y^2-(z-\zeta)^2}{[y^2+(z-\zeta)^2]^2}\left[1+\frac{x-\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+(z-\zeta)^2}}\right]\right\}$$

$$w(x,y,z)=-\frac{\Gamma'(\xi,\zeta)}{4\pi}\frac{y}{y^2+(z-\zeta)^2}\left\{\frac{x-\xi}{[\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+(z-\zeta)^2}]^3}+\frac{2}{y^2+(z-\zeta)^2}\left[1+\frac{x-\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+(z-\zeta)^2}}\right]\right\}$$

以后章节会用到 P 点也位于 xoz 平面上、基元涡产生的扰动速度：

$$v(x,0,z)=\frac{\Gamma'(\xi,\zeta)}{4\pi(z-\zeta)^2}\left[1+\frac{x-\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+(z-\zeta)^2}}\right]$$

得到基元涡诱导的速度，采用直接微分法不难证明位于点 $(\xi,\eta=0,\zeta)$ 的基元涡在空间任意点 $P(x,y,z)$ 的速度势：

$$\Phi(x,y,z)=\frac{\Gamma'(\xi,\zeta)}{4\pi}\frac{y}{y^2+(z-\zeta)^2}\left[1+\frac{x-\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+(z-\zeta)^2}}\right]\tag{2.22}$$

在 $\eta=0$ 平面连续分布、单位面积强度为 $\gamma(\xi,\zeta)$ 基元涡的速度势：

$$\Phi(x,y,z)=\oiint_S\frac{\gamma(\xi,\zeta)}{4\pi}\frac{y}{y^2+(z-\zeta)^2}\left[1+\frac{x-\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+(z-\zeta)^2}}\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\zeta$$

§2.4 低速流动薄翼的线化理论

尽管 Laplace 方程形式简单，至今还没有找到对于各种实际外形都适用的解析解；具体应用中根据 Laplace 方程满足的线性叠加原理，一般利用以上已知的解析解叠加来近似飞行器产生的速度势。

目前发展了两种近似法:一种是在流场中布置有限数目的基本解代替飞行器产生扰动,在飞行器部分点上满足边界条件,建立线性方程组采用计算方法确定基本解的强度参数,从而得到飞行器绕流场速度势的近似解析表达式,在三维情况下称为格子法(Panel method),在二维情况下有时又称为鳞片法。另一种通过布置连续分布的基本解,结合外形等条件的简化,建立以解析形式表示的气动力模型,就形成下面介绍的线化理论,这是部件空气动力学的主要方法。

根据线性叠加原理,假如 Φ_1 和 Φ_2 是 Laplace 方程解,则 $\Phi=\Phi_1+\Phi_2$ 也是方程的解;对于给定外形的飞行器,两个流场速度 $\boldsymbol{V}_1$ 和 $\boldsymbol{V}_2$ 在物面法向分量为零,叠加以后 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}_1+\boldsymbol{V}_2$ 也为零,在后缘满足 Kutta - Joukowski 条件,$\boldsymbol{V}_1$ 和 $\boldsymbol{V}_2$ 方向一致,则叠加以后也自动满足 Kutta - Joukowski 条件;但是飞行器在 Φ 流场中受到气动力不一定等于在 Φ_1 流场、Φ_2 流场中受到气动力之和。如果原来的问题是求解 Φ 对应 u_∞,分解为 Φ_1 和 Φ_2 以后引出了新的速度势变量 $u_{\infty1}$ 和 $u_{\infty2}$,由于无穷远需要满足:$u_\infty=u_{\infty1}+u_{\infty2}$,对应气动力与原来的不一致或没有相似性,其原因是自由来流速度对应的动压头是不能线性叠加的:

$$q_\infty=0.5\rho u_\infty^2\neq q_{\infty1}+q_{\infty2}=0.5\rho u_{\infty1}^2+0.5\rho u_{\infty2}^2$$

实际上这样分解对于解决原问题没有任何好处。

为解决远场边界有效叠加问题,提出扰动速度势(perturbation potential)概念,认为流场速度势 Φ 是由无穷远处均匀流动速度势 Φ_∞ 和由于物体存在引起扰动速度势 φ 线性叠加构成:

$$\Phi=\varphi+\Phi_\infty$$

这里 $\boldsymbol{v}'=\nabla\varphi\triangleq(v_x,v_y,v_z)$,显然 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{V}_\infty$。

在风轴系下远场自由来流速度势 $\Phi_\infty=u_\infty x$,可以推出扰动速度势也满足 Laplace 方程:

$$\Delta\varphi=0 \tag{2.23}$$

根据定义显然在远场扰动速度势的边界条件:$\boldsymbol{v}'_0$ 和 $\varphi=0$。

这样一来,远场自由来流速度势叠加扰动速度势不改变原来流动的动压特性 $\boldsymbol{V}_\infty$,气动力具有可比性,带来很多便利。例如,可以考察单独机翼在均匀流场的扰动,也可以通过两个扰动速度势 φ_1 和 φ_2 叠加以后引起的变化来研究外形改变对气动力的影响,因为在远场满足 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'_1+\boldsymbol{v}'_2=0$ 和 $\varphi=\varphi_1+\varphi_2=0$。

根据固体表面边界条件:$V_n=(\nabla\Phi)\cdot\boldsymbol{n}=\dfrac{\partial\Phi}{\partial n}=0$,推出扰动速度势对应的物体表面边界条件:$(\nabla\varphi)\cdot\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{V}_\infty\cdot\boldsymbol{n}$,在气流坐标系下可以写为:

$$v_y|_w=(u_\infty+v_x|_w)\frac{\partial y_w}{\partial x}+v_z|_w\frac{\partial y_w}{\partial z} \tag{2.24}$$

实际飞机作高速飞行时,为了减小阻力,机翼的相对厚度、弯度都较小,而且迎角也不大;因此,可假设其对流场的扰动是小扰动:

$$|v_x,v_y,v_z|\ll u_\infty\quad\text{(称为小扰动假设)} \tag{2.25}$$

机翼的相对厚度、弯度都较小,物面斜率很小:

$$\left|\frac{\partial y_w}{\partial x}\right| \ll 1, \left|\frac{\partial y_w}{\partial z} \ll 1\right| \qquad \text{（称为薄翼假设）} \tag{2.26}$$

代入(2.24)式，省略高阶小量，得到简化的薄翼化边界条件：

$$v_y|_w = u_\infty \frac{\partial y_w}{\partial x} \tag{2.27}$$

由于扰动速度势远场满足 $\varphi = 0$，因此在简化的边界(2.27)式条件下薄翼扰动速度势主要取决于飞行速度和机翼物面条件(迎角、外形)。实际上气动力系数中采用飞行速度无量纲化，因此在不考虑 V_∞ 情况下，扰动速度势和物面边界条件一一对应。下面分析满足 Kutta－Joukowski 条件、远场自由来流速度均为 u_∞ 的两个不相等、不为零扰动速度势 φ_1 和 φ_2 线性叠加以后 $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ 对应的物面条件 y_w，与 φ_1、φ_2 的物面条件叠加以后形成新的物面条件 $y_{w1} + y_{w2}$ 的关系。

φ_1、φ_2 对应物体表面边界条件：

$$\begin{cases} v_y(x, y_{w1}, z) = u_\infty \dfrac{\partial y_{w1}}{\partial x} \\ v_y(x, y_{w2}, z) = u_\infty \dfrac{\partial y_{w2}}{\partial x} \end{cases}$$

根据解的唯一性要求，显然由于 φ_1、φ_2 不相等，对应外形一定不同，即 $y_{w1} \neq y_{w2}$。

叠加解对应物体表面边界条件写为：

$$v_y(x, y_w, z) = \frac{\partial \varphi(x, y_w, z)}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_1(x, y_w, z)}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2(x, y_w, z)}{\partial y} = u_\infty \frac{\partial y_w}{\partial x} \tag{2.28}$$

如果在边界上有 $y_w = y_{w1}$ 或 $y_w = y_{w2}$，那么另一个扰动速度势必然处处为零，与前面条件不符合，因此 $y_w \neq y_{w1}$ 和 $y_w \neq y_{w2}$，即 (x, y_{w1}, z)、(x, y_{w2}, z) 和 (x, y_w, z) 是空间不同的点，或者有：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi_1(x, y_w, z)}{\partial y} \neq \dfrac{\partial \varphi_1(x, y_{w1}, z)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \varphi_2(x, y_w, z)}{\partial y} \neq \dfrac{\partial \varphi_2(x, y_{w1}, z)}{\partial y} \end{cases}$$

再在考虑外形叠加以后 $y_{w1} + y_{w2}$ 形成新的物面条件：

$$u_\infty \frac{\partial (y_{w1} + y_{w2})}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_1(x, y_{w1}, z)}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2(x, y_{w2}, z)}{\partial y} \neq u_\infty \frac{\partial y_w}{\partial x} \tag{2.29}$$

不是 φ 对应边界条件。由于扰动速度势和物面边界条件一一对应，因此 $y_{w1} + y_{w2}$ 对应的扰动速度势不等于 y_{w1} 和 y_{w2} 的速度势 φ_1 和 φ_2 线性叠加 $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$。

为了建立 y_{w1}，y_{w2} 与 y_w 的关系，或者说根据解的叠加性质从已知的物面条件推导叠加解的物面条件，引入如下的边界条件的线化。

对物面边界条件表达式(2.27)式在 $y = 0$ 进行 Taylor 展开：

$$v_y(x, y_w, z) = v_y(x, 0, z) + y_w \left.\frac{\partial v_y}{\partial y}\right|_{y=0} + \cdots$$

在小扰动、薄翼假设条件下，y_w 是个小量，采用一阶近似，将物面边界条件(2.27)代入上

式，得到线化边界条件：

$$v_y(x,0,z) \approx u_\infty \frac{\partial y_w}{\partial x} \tag{2.30}$$

同样有：

$$\begin{cases} v_{1y}(x,0,z) \approx u_\infty \dfrac{\partial y_{w1}}{\partial x} \\ v_{2y}(x,0,z) \approx u_\infty \dfrac{\partial y_{w2}}{\partial x} \end{cases}$$

这样一来，叠加解 φ 的物面边界条件就是 φ_1、φ_2 物面边界条件直接叠加：

$$v_y(x,0,z) = \frac{\partial \varphi_1(x,0,z)}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2(x,0,z)}{\partial y} = u_\infty \left(\frac{\partial y_{w1}}{\partial x} + \frac{\partial y_{w2}}{\partial x} \right)$$

为了避免后缘流动分离、减小机翼阻力，工程中一般采用尖后缘机翼，即：

$$v_y[b_1(z),0] \approx u_\infty \left. \frac{\partial y_w}{\partial x} \right|_{x=b_1(z)} = 0$$

因此薄机翼物面条件线化以后，后缘的 Kutta - Joukowski 条件自动满足。

总结以上分析，可以推出如下结论：

如果已知物面条件 y_{w1}, y_{w2}，求出扰动速度势 φ_1、φ_2，那么，线性叠加解 $\varphi = a \cdot \varphi_1 + b \cdot \varphi_2$ 是对应的新外形 $y_w(x,z) = a \cdot y_{w1}(x,z) + b \cdot y_{w2}(x,z)$ 的扰动势；或者物面条件 $y_w(x,z) = a \cdot y_{w1}(x,z) + b \cdot y_{w2}(x,z)$ 对应的扰动速度势为 $\varphi = a \cdot \varphi_1 + b \cdot \varphi_2$。

压力系数定义：

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{0.5\rho_\infty u_\infty^2}$$

对于定常、无粘、不可压流动（质量力有势），沿流线满足 Bernoulli 方程，代入上式，省略高阶小量，得到小扰动条件下压力系数一阶近似表达式：

$$C_p = 1 - \frac{|V|^2}{u_\infty^2} = 1 - \frac{(u_\infty + v_x)^2 + v_y^2 + v_z^2}{u_\infty^2} \approx -2\frac{v_x}{u_\infty} = -2\frac{1}{u_\infty}\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

在物体表面压力系数：

$$C_p = -2\frac{1}{u_\infty}\frac{\partial \varphi(x, y_w, z)}{\partial x}$$

对于薄翼，还可以采取在 $y=0$ 进行 Taylor 展开，进一步近似到 $y=0$ 平面上来：

$$C_p = -2\frac{1}{u_\infty}\frac{\partial \varphi(x,0,z)}{\partial x} \tag{2.31}$$

这一简化过程称为压力系数的线化，上式称为薄翼的线化压力系数。

线化压力系数在物体表面也满足线性叠加解的叠加规则：

根据物面条件 y_{w1}, y_{w2}，得到扰动速度势 φ_1、φ_2 和压力系数 C_{p1}、C_{p2}，那么物体条件线性叠加形成的新外形：$y_w(x,z) = a \cdot y_{w1}(x,z) + b \cdot y_{w2}(x,z)$ 的线性叠加解 $\varphi = a \cdot \varphi_1 + b \cdot \varphi_2$ 流场内对应点的压力系数：

$$C_p = -2\frac{1}{u_\infty}\frac{\partial \varphi(x,0,z)}{\partial x}$$

$$= -2\frac{1}{u_\infty}\left[a\frac{\partial\varphi_1(x,0,z)}{\partial x}+b\frac{\partial\varphi_2(x,0,z)}{\partial x}\right]$$

$$= a\cdot C_{p1}+b\cdot C_{p2} \tag{2.32}$$

根据薄翼上下物面方程,引入如下两个新的函数:

$$y_c(x,z)=0.5[y_u(x,z)+y_l(x,z)]$$

$$y_t(x,z)=0.5[y_u(x,z)-y_l(x,z)]$$

前者是气流坐标系下机翼的中弧面方程,由体轴系下中弧面方程转动迎角 α 得到;后者是机翼的厚度方程,气流坐标系下和体轴系下是一样的。

满足远场条件、Kutta - Joukowski 条件和 y_c 和 y_t 的扰动速度势 φ_c 和 φ_t,其中 φ_c 在气流坐标系下对应的物面边界条件:

$$v_y(x,0,z)=u_\infty\frac{\partial y_c}{\partial x} \tag{2.33}$$

φ_t 气流坐标系下对应的物面边界条件:

$$v_y(x,0_+,z)=u_\infty\frac{\partial y_t}{\partial x}\text{和}v_y(x,0_-,z)=-u_\infty\frac{\partial y_t}{\partial x} \tag{2.34}$$

现在考察叠加解 $\varphi'=\varphi_c+\varphi_t$ 的边界条件。它正好就是(2.32)式,根据解的唯一性,得出:$\varphi'=\varphi$。这样一来,薄翼小扰动绕流问题可以分解为无穷远速度为 u_∞、无迎角、厚度分布为 $2y_t(x,z)$的对称机翼绕流问题(所谓厚度问题),和无穷远速度为 u_∞、迎角 α、无厚度的曲面 $y_c(x,z)$的绕流问题(所谓弯度问题)。

在小扰动条件下,线化压力系数也是可以叠加的,所以薄翼小扰动流场的压力系数也可分别由其相应的厚度问题和弯度问题的压力系数叠加而得。由于厚度问题所研究流场具有对称性,它的压力系数对机翼的升力以及与升力有关的气动特性没有贡献;根据 D' Alember 疑题,可以证明物体在无粘不可压流体中运动时不产生阻力,所以经常不考虑厚度问题。

因此,机翼绕流问题主要研究弯度问题,由于对升力和与升力有关的气动特性起着主要作用的是弯度问题,所以弯度问题有时又称为升力问题。

本章小结

根梢弦长展弦比,上反扭转后掠翼;
风轴体轴坐标系,迎角联系气动力;
速势方程基本解,源汇偶极和涡线;
薄翼扰动两假设,边条压力要线化。

习　题

2-1　查找一个飞机三视图，表明翼展、根弦、梢弦、后掠角等机翼的几何术语，求出展弦比、根梢比、几何平均弦长。

2-2　已知机翼迎角 $\alpha=5°$ 时 $C_L=0.9$ 和 $C_D=0.05$，求 C_N 和 C_A。

2-3　机翼平面图形由抛物线：$z^2=\dfrac{l^2}{4}\left(1-\dfrac{x}{b_0}\right)$ 和 z 轴围成：

(1)求 S,λ,b_{pj}；

(2)设 $\lambda=6,l=8\text{m}$，求根弦长 b_0。

2-4　有椭圆型机翼，由两个半椭圆形合成，长轴均为 $l=8\text{m}$，根弦长 $b_0=2.0\text{m}$，上半椭圆半短轴长为 $b_0/4$，下半椭圆半短轴长为 $3b_0/4$；求 S,λ,b_{pj} 和后掠角 $\chi_{0.25}$。

2-5　已知梯形机翼梢根比 $\xi=1/3,\chi_{0.5}=0,S=20\text{m}^2,b_1=1.5\text{m}$，试计算：

(1)展弦比 λ、χ_0、$\chi_{0.25}$ 和 χ_1，并按比例画出其平面图形；

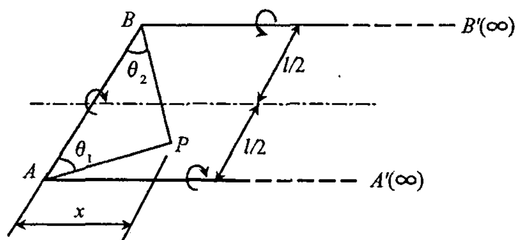
(2)比较 b_{pj} 和 b_A，并说明其对应的物理意义。

2-6　画出位于原点(0,0,0)处强度为 $Q=100$ 点源在 $y=1$ 平面的流线，考虑沿流线 Bernoulli 方程是否成立？自然界的泉是流体力学定义的源么？

2-7　流场中包含位于(-1,0,0)强度为 $Q=20$ 点源，和位于(1,0,0)强度为 $Q=10$ 点源，求 $y=1$ 平面的速度，定性画出流线。

2-8　证明位于偶极子速度势：$\Phi(x,y,z)=\dfrac{M}{4\pi}\left[\boldsymbol{n}\cdot\nabla\left(\dfrac{1}{r}\right)\right]=\dfrac{M}{4\pi}\dfrac{\partial}{\partial n}\left(\dfrac{1}{r}\right)$ 也是基本解。

2-9　有一如图题2-9所示的位于为 xoy 的马蹄涡，在涡平面上有一 P 点 x 坐标以及连线 $\overline{PA}$、$\overline{PB}$ 与 $\overline{AB}$ 涡线的夹角分别为 θ_1 和 θ_2 值，马蹄涡的强度为 Γ；试推导该马蹄涡对 P 点的诱导速度 V_z(下洗速度)。



图题2-9

2-10　证明沿曲线连续分布单位长度源强度为 $\sigma(\xi,\eta,\zeta)$ 的点源引起速度势也满足速势方程。

2-11　对于位于 xoz 平面、涡线 AB 平行于 z 轴的马蹄涡，当 $|AB|\to 0$，保持 $|AB|\cdot\Gamma=\Gamma'$ 不变，这种极限情况称为基元涡；推导基元涡在任意空间点 $P(x,y,z)$ 处产生的扰动

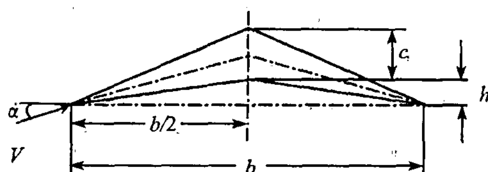
速度和速度势。

2-12 推导体轴系下低速流动的小扰动速势方程、线化边界条件和压力系数表达式。

2-13 证明在线化理论成立的条件下，物面方程满足 $y_{w1}=c\cdot y_{w2}$ 两个薄机翼，如果小扰动速势之间存在关系：$\varphi_1=c\cdot\varphi_2$，那么迎角之间有：$\alpha_1=c\cdot\alpha_2$。

2-14 证明在线化理论成立的条件下，迎角为 α 薄机翼弯度问题的小扰动速势可以进一步分解为：迎角为零中弧面引起的小扰动速势和迎角为 α 具有相同机翼平面形状平板产生的小扰动速势之和。

2-15 由图题 2-15 所示薄翼型组成的矩形机翼，翼展为 l，在小迎角下定常运动；根据叠加原理，可以把该机翼绕流问题分为厚度问题和弯度问题来处理；写出相应的线化位流方程和近似边界条件。



图题 2-15

第三章　低速流动中翼型气动力预测方法

在部件空气动力学研究中，预测机翼气动力常常要涉及到翼型，从发展历史来看，正是由于对翼型气动特性的系统研究，才形成这门学科。在早期飞机发明以后的翼型研制中，主要是模仿鸟翼，从大量实验中优选，第一次世界大战前优良的翼型有英国皇家飞机工厂研制的 RAF6 和 RAF15；第一次世界大战后，航空工业飞速发展吸引了一批优秀的流体力学理论工作者，逐渐形成完善理论，设计出优秀的翼型。典型的翼型有德国的戈廷根大学研究出的 Gottingen387 翼型（1919 年），美国 Clark 研究出的 Clark - Y 翼型（1922 年），英国 Glauert 创造的新 RAF6 翼型，都是应用薄翼理论设计出来的。根据薄翼理论，翼型的厚度和弯度可以分开考虑；美国航空研究机构 NACA（National Advisory Committee for Aeronautics，后改名 NASA National Aeronautics and Space Administration）对翼型进行系统研究，1930 年提出 NACA 四位数翼型设计方法，以后又出现了五位数翼型、层流翼型，现在较低速度使用的翼型大多是 NACA 翼型或者是在其影响下的改进翼型，如德国学者研究出的著名的 DVL 翼型。上个世纪 60 年代，要求尽量延缓激波引起高亚音速翼型表面流动分离，提出了超临界翼型；然而对于跨声速来说，机翼形状比翼型更重要，研究工作者注意力开始转移，花在机翼平面形状上的研究精力比翼型更大，提出防止激波失速采用后掠机翼、三角机翼等措施。图 3.1 是常见的翼型形状。

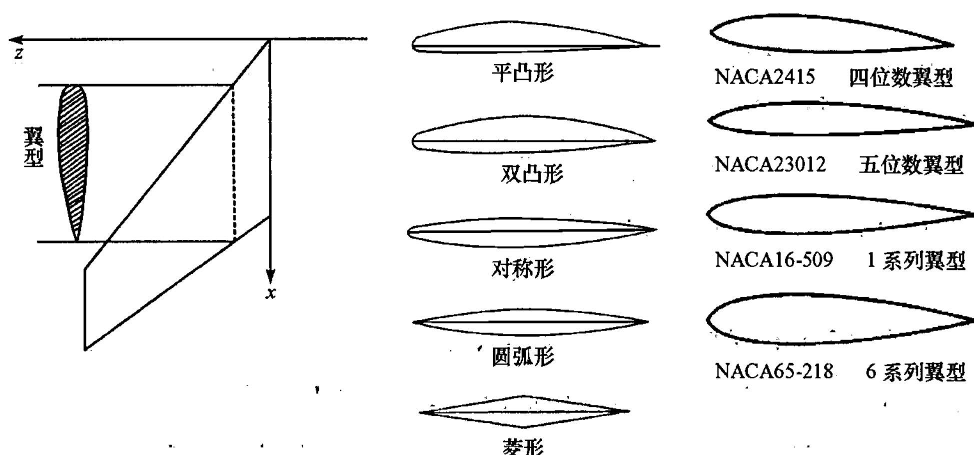


图 3.1　翼型和常见的翼型剖面形状

§3.1 低速平面流动的速度势理论

如果在直角坐标系下流动参数沿某个方向(一般取 z)导数为零,称为平面流动。从数学形式上看,低速平面流动是低速三维流动的特例,速度势函数也满足方程 $\Delta\Phi=0$,有一些包括点源、点涡、偶极子等基本解,从对应的图像看,平面流动与三维流动也较为相似;但是,二者所反映的物理模型常常有较大差异,例如,平面流动要求基本解在空间沿 z 轴两端延伸到无穷远,严格地说现实世界不存在真正的"平面流动"。下面介绍几个是流体力学分析中常用的基本解速度势。

速度 $\boldsymbol{V}_\infty=(u_\infty,v_\infty)$ 均匀流产生的速度势:

$$\Phi=u_\infty\cdot x+v_\infty\cdot y$$

对应流线是与 x 轴正向夹角为 $\theta=\arctan\dfrac{v_\infty}{u_\infty}$ 的平行直线。

位于点(ξ,η)、流量为 Q 的点源速度势:

$$\Phi=\frac{Q}{2\pi}\ln r$$

流线是从源点发出的辐射线,这里 $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$。如果取源点为原点($\xi=0,\eta=0$)的柱坐标系,那么切向速度 $v_\theta=0$,径向速度 $v_r=\dfrac{Q}{2\pi r}$;对圆心在源点的同心圆进行流量积分,所得积分值为常数 Q,离开源点越远流速越慢;如果 Q 为正,流线方向从源点向外,如果 Q 为负,流线向源点汇聚,有时又称为点汇。

位于点(ξ,η)、强度为 M、指向 x 轴的偶极子速度势:

$$\Phi=-\frac{M\cdot(x-\xi)}{r^2}$$

流线是圆心在 $x=\xi$ 直线上、与 $y=\eta$ 直线相切的圆族。更为一般的情况,如果偶极子与 x 轴夹角为 α,速度势为:

$$\Phi=-\frac{M}{r^2}[(x-\xi)\cos\alpha+(y-\eta)\sin\alpha]$$

位于点(ξ,η)、涡强为 Γ 的点涡速度势:

$$\Phi=\frac{\Gamma}{2\pi}\arctan\frac{y-\eta}{x-\xi}$$

流线是围绕点(ξ,η)的同心圆。取涡点为原点($\xi=0,\eta=0$)的柱坐标系,径向速度 $v_r=0$,切向速度 $v_\theta=\dfrac{\Gamma}{2\pi r}$;如果 Γ 为正,流线逆时针转动,如果 Γ 为负,流线顺时针转动;对圆心在源点的同心圆进行环量积分,所得积分值为常数 Γ,离开涡点越远流速越慢。

以上几种基本解对应的流线如图 3.2。

这些基本解叠加以后依然满足 Laplace 方程,也是速度势;利用这一特性可以得到一些有应用价值的物体外形产生的速度势。x 方向均匀流动和位于坐标原点、强度为 Q 的

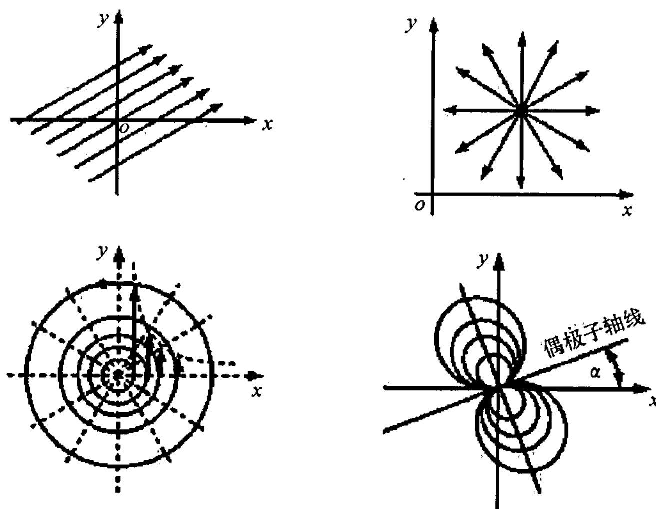


图 3.2　均匀流、点源、点涡和偶极子形成的流动

正点源叠加以后形成流场中一部分，与长度无限的钝头体在均匀流动中引起的速度势等价，所形成的流线与图 2.7 类似：

$$\Phi = u_\infty \cdot x + \frac{Q}{4\pi}\ln(x^2 + y^2)$$

在二维情况下，可以写出物面曲线方程：

$$u_\infty \cdot y + \frac{Q}{2\pi}\arctan\frac{y}{x} = 0$$

如果 x 方向均匀流动和位于坐标原点、强度为 M、指向负 x 轴的偶极子叠加以后形成的部分流场，与圆柱放置在均匀流动引起速度势等价：

$$\Phi = u_\infty \cdot x + M\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

圆半径由流动参数决定：

$$R_w = \sqrt{\frac{M}{u_\infty}}$$

根据速度势求出流场速度，径向速度 $u_r = 0$，切向速度 $u_\theta = 2u_\infty\sin\theta$；可以得到圆柱表面的压力系数：

$$C_p = 1 - 4\sin^2\theta$$

沿表面积分以后发现流体产生的作用合力为零，这是 D'Alember 疑题的一个例证。

如果在均匀流动和偶极子形成的流动基础上再叠加点涡：

$$\Phi = u_\theta \cdot x + M\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\Gamma}{2\pi}\arctan\frac{y}{x}$$

由于点涡的流线是同心圆，因此不会破坏圆柱所在位置的流线，但是点涡改变了圆柱表面的切向速度，导致表面压力系数分布不再对称，沿表面积分以后发现阻力为零，但是存在升力：

$$Y=\rho u_{\infty}\cdot\Gamma$$

通过这一例证说明满足物面法向速度为零条件的速度势不唯一。

以上是孤立的基本解，所对应的外形曲线是根据布置的基本解强度、位置等参数决定的；对于工程问题正好相反，是先设计出来机翼外形，然后求对应速度势。对于给定的翼型绕流问题，采用速度势 Laplace 方程的方法预测气动力，除了下面介绍的小扰动的线化方法外，还有保角变换、鳞片法等方法。其中保角变换方法利用复变函数两个图形之间的变换关系，通过已知速度势解析表达式流场来建立待求解翼型绕流速度势。如图 3.3 示意，圆柱放置在均匀流动引起速度势和流函数构成采用复变函数表达的、所谓的复位函数已知，圆柱和平板之间保角变换关系解析形式也确定，如果无穷远来流速度一样，就可以写出平板放置在均匀流动引起复位函数，从而求出其对应的速度势。

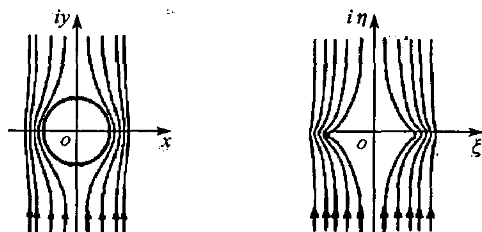


图 3.3　保角变换方法示意图

尽管理论上单连通域构成的任意平面形状与圆柱之间存在一一对应的保角变换，但是在许多情况下很难以找到所设计出来翼型与已知速度势的有限基本解之间的保角变换关系解析形式，因此实际应用中使用较多的是进一步简化线化理论或者近似的鳞片法。

§3.2　翼型线化理论

薄翼型小扰动绕流问题可以分解为厚度问题和弯度问题，对薄翼型升力起主要作用的是弯度问题，所以弯度问题有时又称为升力问题。

在体轴系，翼型弯度问题小扰动速度势满足 Laplace 方程：

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0 \tag{3.1}$$

远场条件自动满足，物面线化边界条件：

$$v_y(x,0)=u_{\infty}\left(\frac{\partial y_c}{\partial x}-\alpha\right) \tag{3.2}$$

满足以上条件对应的解不唯一，可以得到多个流动图像；根据实验观测，在小迎角无分离流动情况下，上下翼型表面附近的流线在后缘点会合，增加 Kutta - Joukowski 条件保证小扰动速度势解唯一。

根据流体力学理论，物体从流场中获得的升力和流体绕物体的涡环量一一对应；在前面介绍的基本解中，均匀流动与涡叠加才会产生升力，因此采用涡来代替翼型引起的速度

势。由于翼型沿弦向尺度远远大于厚度，所以在空间上不可能布置点涡满足整个弦向边界条件，需要在翼型弯度位置上布置连续涡。为了使布置涡的流动速度势与翼型绕流速度势等价，需要根据翼型的物面边界条件决定点涡强度随弯度曲线的分布特性；由于翼型的物面边界条件已经线化到 x 轴上，所以如图 3.4 示意，单位长度强度为 $\gamma(x)$ 的连续涡也布置在 x 轴上，涡垂直于 xoy 平面两侧延伸到无穷远，涡方向指向 $-z$。

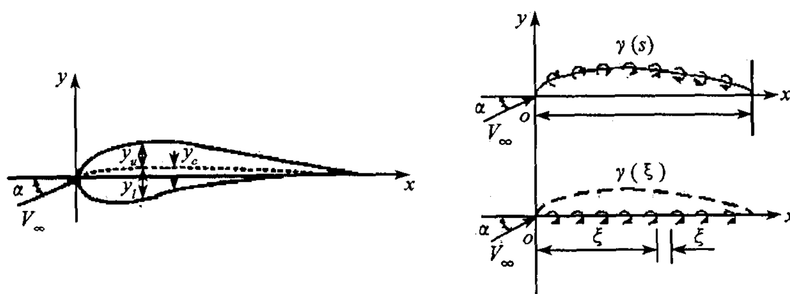


图 3.4　翼型弯度问题的点涡模型

在 ξ 点微小涡段 $d\xi$ 涡量为 $\gamma(\xi)d\xi$ 对翼型位置 x 处产生的 y 向扰动速度为：

$$dv_y(x,0) = -\frac{\gamma(\xi)d\xi}{2\pi(x-\xi)} \tag{3.3}$$

沿翼型弦线积分求出整个涡线在 x 处产生的 y 向扰动速度，根据翼型绕流弯度问题的线化边界条件，扰动速度应该满足：

$$v_y(x,0) = \int_0^b \frac{\gamma(\xi)d\xi}{2\pi(\xi - x)} = u_\infty\left(\frac{\partial y_c}{\partial x} - \alpha\right) \tag{3.4}$$

称为翼型弯度问题的积分方程。

根据积分方程(3.4)求出涡强 $\gamma(x)$ 关系式，就可以得到涡线在均匀来流中产生的扰动速度势：

$$\varphi_c(x,y) = \int_0^b -\frac{\gamma(\xi)}{2\pi}\arctan\frac{y}{x-\xi}d\xi \tag{3.5}$$

扰动速度势 φ_c 产生的上表面压力系数：

$$C_{pu}(x) = -\frac{2}{u_\infty}\lim_{y\to 0+}\frac{\partial\varphi_c(x,y)}{\partial x} \tag{3.6}$$

$$\lim_{y\to 0+}\frac{\partial\varphi_c(x,y)}{\partial x} = \lim_{y\to 0+}\int_0^b \frac{\gamma(\xi)}{2\pi}\cdot\frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}d\xi$$

在 $y\to 0$ 条件下，积分式中函数只有 $\xi = x$ 处不为零，涡强 $\gamma(\xi)$ 连续，在 $\xi = x$ 的微小邻域内变化不大，可以用 $\gamma(x)$ 近似；同时积分区域从 $[0,b]$ 变为 $[-\infty,+\infty]$ 也不影响积分值，因此有：

$$\begin{aligned}\lim_{y\to 0+}\int_0^b \frac{\gamma(\xi)}{2\pi}\cdot\frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}d\xi &= \frac{\gamma(x)}{2\pi}\cdot\lim_{y\to 0+}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}d\xi \\ &= \frac{\gamma(x)}{2\pi}\cdot\arctan\frac{\xi - x}{y}\Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\gamma(x)}{2}\end{aligned}$$

或者先求出积分：

$$\lim_{y\to 0+}\int_0^b \frac{\gamma(\xi)}{2\pi}\cdot\frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}d\xi = \frac{\gamma(x)}{2\pi}\lim_{y\to 0+}\cdot\arctan\frac{\xi-x}{y}\Big|_0^b$$

$$= \frac{\gamma(x)}{2\pi}\cdot\lim_{y\to 0+}\left[\arctan\frac{b-x}{y}-\arctan\frac{-x}{y}\right]$$

根据 $x\in(0,b)$,即 $b-x>0$ 和 $-x<0$,取极限以后也可以得到:

$$v_x(x,0_+) = \lim_{y\to 0+}\frac{\partial\varphi_c(x,y)}{\partial x} = \frac{\gamma(x)}{2} \tag{3.7}$$

同理,φ_c 产生的下表面压力系数表达式中,有:

$$v_x(x,0_-) = \lim_{y\to 0-}\frac{\partial\varphi_c(x,y)}{\partial x} = \lim_{y\to 0-}\int_0^b\frac{\gamma(\xi)}{2\pi}\cdot\frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}d\xi = -\frac{\gamma(x)}{2} \tag{3.8}$$

翼型表面线化压力系数表达式中包含厚度问题和弯度问题两部分:

$$C_p(x) = -\frac{2}{u_\infty}\frac{\partial\varphi(x,0)}{\partial x} = -\frac{2}{u_\infty}\left(\frac{\partial\varphi_c(x,0)}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_t(x,0)}{\partial x}\right)$$

翼型上下表面压力系数差,称为翼型载荷系数。由于厚度问题上下表面压力系数相等,对载荷系数没有贡献,可以得到翼型载荷系数:

$$\Delta C_p(x) = C_{pl}(x) - C_{pu}(x) = \frac{2\gamma(x)}{u_\infty} \tag{3.9}$$

在后缘点满足 Kutta - Joukowski 条件,则有 $\Delta C_p(x)=0$,即 $\gamma(b)=0$。

根据解的唯一性知,所得扰动速度势满足小扰动速度势方程、边界条件,就是翼型弯度问题在均匀来流中产生的扰动速度势。原则上给定翼型弯度曲线方程 $y_c(x)$以后,根据等式(3.4)可以确定函数 $\gamma(x)$;但是对于大部分外形不可能直接写出解析表达式;实际应用中常采用把 $\gamma(\theta)$展开为 Fourier 级数形式求解。

引入中间变量 θ,$\xi=0.5b(1-\cos\theta)$,记 $x=0.5b(1-\cos\theta_1)$,方程(3.4)变为:

$$-\int_0^\pi\frac{\gamma(\theta)\sin\theta}{2\pi(\cos\theta-\cos\theta_1)}d\theta = u_\infty\left(\frac{\partial y_c}{\partial x}-\alpha\right) \tag{3.10}$$

为了有效反映翼型流动特性,下面根据流动边界条件分析 $\gamma(\theta)$的 Fourier 级数形式的特征。翼型后缘点满足 Kutta - Joukowski 条件:$\gamma(b)=\gamma(\pi)=0$,在 Fourier 级数中部分项为零;其次,前缘点 $\theta=0$ 处对应是驻点,速度 $V=0$,扰动速度 $v'_x=-u_\infty$,相当于扰动无穷大,涡强 $\gamma(0)\to\infty$;所以把 $\gamma(\theta)$写成如下三角级数形式:

$$\gamma(\theta) = 2u_\infty\left(A_0\cot\frac{\theta}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\sin(n\theta)\right) \tag{3.11}$$

代入积分方程(3.10) 左端项,利用三角函数的半角公式、积化和差公式,变为:

$$-\frac{u_\infty}{\pi}\int_0^\pi\left(\frac{A_0(1+\cos\theta)}{(\cos\theta-\cos\theta_1)}-\frac{0.5\sum_{n=1}^{\infty}A_n[\cos(n+1)\theta-\cos(n-1)\theta]}{(\cos\theta-\cos\theta_1)}\right)d\theta$$

利用积分关系式:

$$I_n = \int_0^\pi\frac{\cos(n\theta)}{(\cos\theta-\cos\theta_1)}d\theta = \pi\frac{\sin(n\theta_1)}{\sin\theta_1}$$

和三角函数的和差化积公式,得到:

$$-A_0+\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\cos(n\theta_1)=\frac{\partial y_c}{\partial x}-\alpha$$

采用 Fourier 级数可以确定系数：

$$A_0=\alpha-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}y_c}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\theta_1$$

$$A_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}y_c}{\mathrm{d}x}\cdot\cos(n\theta_1)\mathrm{d}\theta_1$$

这样在给定翼型弯度曲线方程 $y_c(x)$ 以后，求出涡强分布 $\gamma(x)$。根据翼型表面载荷系数和涡强，翼型微元的法向力：

$$\mathrm{dN}=0.5\rho\cdot u_\infty^2\cdot\Delta C_p(x)\cdot\mathrm{d}x=\rho\cdot u_\infty\cdot\gamma(x)\mathrm{d}x \tag{3.12}$$

在小迎角情况下近似有 $\cos\alpha\approx1$，即 $\mathrm{d}N\approx\mathrm{d}Y$；沿弦向积分，就得到翼型升力：

$$F_y=\rho u_\infty\int_0^b\gamma(x)\mathrm{d}x$$

或者直接根据涡强 $\gamma(x)$ 得到环量为：

$$\Gamma=\int_0^b\gamma(x)\cdot\mathrm{d}x=\pi u_\infty b\left(A_0+\frac{A_1}{2}\right)\quad(\text{方向为}-z) \tag{3.13}$$

也可以求出升力：$F_y=\rho u_\infty\Gamma$，可以看出二者是一致的。

翼型的升力系数(lift coefficient)：

$$C_L=\frac{F_y}{q_\infty\cdot b}=2\pi(A_0+\frac{A_1}{2})\triangleq2\pi(\alpha-\alpha_0) \tag{3.14}$$

其中 $\alpha_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}y_c}{\mathrm{d}x}\cdot(1-\cos\theta_1)\mathrm{d}\theta_1$ 称为零升迎角(the angle of zero lift)；对应的把 $\alpha_a=\alpha-\alpha_0$ 称为绝对迎角(the absolute angle of attack)。

升力系数相对于迎角的变化率：

$$C_L^\alpha=\frac{\partial C_L}{\partial\alpha}=2\pi \tag{3.15}$$

称为升力线斜率(slope of lift curve)。

可以看出，根据线化理论推出的翼型升力系数与外形 $y_c(x)$有关，但是升力线斜率与外形无关，这一结论与实验非常接近。对于实际翼型，上下翼面存在附面层，工程上常用下式近似：

$$C_L^\alpha=2\pi-4.7t_{\max}(1+0.00375\tau_1) \tag{3.16}$$

其中 τ_1 是翼型后缘夹角，单位是度。

翼型产生的环量与阻力无关，根据线化理论得不到实际翼型的阻力系数。

相对前缘点，抬头为正，翼型微元产生的俯仰力矩：

$$\mathrm{d}M_z=-x\cdot\mathrm{d}Y=-x\cdot\rho\cdot u_\infty\cdot\gamma(x)\mathrm{d}x$$

沿弦线积分，得到翼型俯仰力矩：

$$M_z=-\rho u_\infty\int_0^b\gamma(x)\cdot x\cdot\mathrm{d}x=-\frac{\pi\rho u_\infty^2b^2}{4}\left(A_0+A_1-\frac{A_2}{2}\right)$$

翼型平均气动弦长就是翼型弦长：$b=b_A$，得到相对前缘点的俯仰力矩系数为(pitching mo-

ment coefficient):

$$C_{mz}=\frac{M_z}{q_\infty\cdot S\cdot b_A}=\frac{\pi}{4}(A_2-A_1)-\frac{C_L}{4} \tag{3.17}$$

保持力的大小和方向不变,改变力矩参考用点,存在一点使得俯仰力矩为零,称为压力中心(pressure centre),简称为压心。作用于机翼的俯仰方向的气动力可以用位于这一点的升力来表示。以弦长无量纲、相对前缘点翼型的压心位置为:

$$X_p=-\frac{C_{mz}}{C_L}=\frac{1}{4}-\frac{\pi}{4C_L}(A_2-A_1) \tag{3.18}$$

飞行器控制系统设计中非常关心机翼升力增量和俯仰力矩增量之间的关系,还引入一个与压心相近的气动力术语描述升力增量的作用点,称为翼型焦点(aerodynamic centre)。以弦长无量纲、相对前缘点翼型的焦点位置为:

$$X_F=-\frac{\partial C_{mz}}{\partial C_L}=\frac{1}{4} \tag{3.19}$$

连续涡 $\gamma(x)$和翼型的扰动速度势是一致的;根据环量得到等价点涡 Γ 和翼型产生的升力是一致的,因此气动力研究中有时采用点涡代替翼型,这种能够产生升力的涡称为附着涡(bound vortex)。

如果采用沿 z 方向无穷长、强度为 Γ 的点涡来等效翼型连续涡 $\gamma(x)$产生的气动升力,那么点涡放在焦点位置比较方便。从(3.19)式可以看出,如果把力矩相对参考点取为离前缘 1/4 弦线点,尽管升力随迎角线性变化,但是绕该点的力矩保持不变:

$$C_{mz}|_{0.25}=\frac{\pi}{4}(A_2-A_1)$$

例 3.1 已知翼型弦长 $b=1$,弯度方程为:$y_c(x)=4c(x-x^2)$,求小扰动条件下翼型气动力特性。

解:引入中间变量 θ,$x=0.5(1-\cos\theta_1)$,体轴系下弯度方程的导数为:

$$\frac{\mathrm{d}y_c}{\mathrm{d}x}=4c\cos\theta_1$$

分布涡强:

$$\gamma(\theta)=2u_\infty\left(A_0\cot\frac{\theta}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\sin(n\theta)\right)$$

代入翼型涡强积分方程,得出:

$$A_0=\alpha-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{\mathrm{d}y_c}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\theta_1=\alpha$$

$$A_1=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\frac{\mathrm{d}y_c}{\mathrm{d}x}\cdot\cos(\theta_1)\mathrm{d}\theta_1=4c,\quad \text{其余 } A_n=0\qquad n\geqslant 2$$

零升迎角:

$$\alpha_0=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{\mathrm{d}y_c}{\mathrm{d}x}\cdot(1-\cos\theta_1)\mathrm{d}\theta_1=-2c$$

翼型的升力系数:

$$C_L=\frac{Y}{q_\infty\cdot b}=2\pi(A_0+\frac{A_1}{2})=2\pi(\alpha+2c)$$

升力线斜率：

$$C_L^\alpha = \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} = 2\pi$$

对前缘的俯仰力矩：

$$C_{mz} = -\frac{\pi}{4}A_1 - \frac{C_L}{4} = -\frac{\pi}{2}(\alpha + 4c)$$

翼型的焦点和压心位置：

$$X_F = -\frac{\partial C_{mz}}{\partial C_L} = \frac{1}{4},\quad X_p = -\frac{C_{mz}}{C_L} = \frac{1}{4} + \frac{c}{2\alpha + 4c}$$

可以看出焦点和压心不在同一位置，迎角 $\alpha = 0$ 时，压心 $X_p = \frac{1}{2}$，随着迎角增大，压心逐步向焦点移动；升力随迎角线性变化，但是绕该点的力矩保持不变。

例 3.2　求弦长 b 的对称翼型小扰动条件下翼型气动力特性。

解：体轴系下对称翼型弯度方程为：$y_c(x) = 0$，代入以上公式知：

$$A_0 = \alpha,\quad \text{其余 } A_n = 0 \qquad n \geqslant 1$$

涡强分布：$\gamma(\theta) = 2u_\infty \alpha \cot\frac{\theta}{2} = 2u_\infty \alpha \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta}$

换回原变量 $x = 0.5b(1 - \cos\theta)$，得到：$\gamma(x) = 2u_\infty \alpha \sqrt{(b - x)/x}$，这也是平板翼型升力问题的涡强分布。代入以上公式，得到：

平板翼型零升迎角：$\alpha_0 = 0$

升力系数：$C_L = 2\pi\alpha$

升力线斜率：$C_L = 2\pi$

对前缘的俯仰力矩：$C_{mz} = -\frac{\pi}{2}\alpha$

焦点和压心在同一位置：$X_F = X_p = \frac{1}{4}$

环量为：$\Gamma = \int_0^b \gamma(x) \cdot \mathrm{d}x = \pi\alpha \cdot u_\infty \cdot b$ 。

如果在均匀流场中正好在焦点位置布置强度为 Γ 的点涡，产生的升力与对称翼型的一样：$Y = \rho u_\infty \cdot \Gamma$；那么在下游 $\frac{3}{4}b$ 弦线处诱导的速度为 $v_\Gamma = -\frac{\Gamma}{\pi b} = -u_\infty \alpha$，与自由来流速度法向分量叠加以后为零，自动满足翼型的线化边界条件，因此有时根据这一性质来计算等效翼型升力的点涡强度。

例 3.3　带有前后缘襟翼的对称翼型的弯度问题，采用线化理论研究时可以简化为如图示意的模型，已知前后缘襟翼长度占整个弦长 b 很小的一部分，比例分别为 c_s 和 c_f，前后缘襟翼相对于翼型弦线的舵偏角分别为 δ_s 和 δ_f，求小扰动条件下翼型气动力特性。

解：取体轴系，由于襟翼长度占整个弦长 b 比例很小，认为有舵偏角的弦线相对来流的迎角不变，翼型的斜率为：

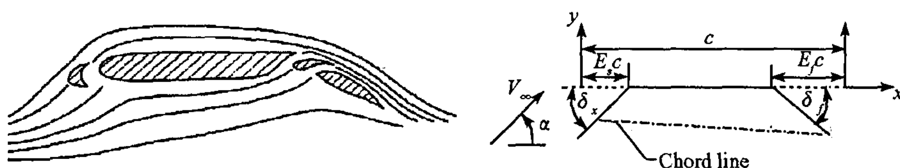


图 3.5 带有前后缘襟翼的平板翼型

$$\frac{\mathrm{d}y_c}{\mathrm{d}x} \approx \begin{cases} \delta_s & 0 < x < c_s \cdot b \\ 0 & c_s \cdot b < x < (1-c_f)\cdot b \\ -\delta_f & (1-c_f)\cdot b < x < b \end{cases}$$

引入中间变量 $\theta, x = 0.5b(1-\cos\theta)$,记:

$$\begin{cases} c_s \cdot b = 0.5b(1-\cos\theta_s) \\ (1-c_f)\cdot b = 0.5b(1-\cos\theta_f) \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{d}y_c}{\mathrm{d}x} \approx \begin{cases} \delta_s & 0 < \theta < \theta_s \\ 0 & \theta_s < \theta < \theta_f \\ -\delta_f & \theta_f < \theta < \pi \end{cases}$$

分布涡强:$\gamma(\theta) = 2u_\infty\left(A_0\cot\frac{\theta}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin(n\theta)\right)$

代入翼型涡强积分方程,得出:

$$A_0 = \alpha - \frac{1}{\pi}\int_0^{\theta_s}\delta_s \mathrm{d}\theta_1 - \frac{1}{\pi}\int_{\theta_f}^{\pi}(-\delta_f)\mathrm{d}\theta_1$$

$$= \alpha + \delta_f - \frac{1}{\pi}(\delta_s \cdot \theta_s + \delta_f \cdot \theta_f)$$

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\theta_s}\delta_s \cdot \cos n\theta_1 \mathrm{d}\theta_1 + \frac{2}{\pi}\int_{\theta_f}^{\pi}(-\delta_f)\cdot \cos n\theta_1 \mathrm{d}\theta_1$$

$$= \frac{2}{n\pi}(\delta_s \cdot \sin n\theta_s + \delta_f \cdot \sin n\theta_f) \qquad n = 1,2,3,\cdots$$

零升迎角:

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}y_c}{\mathrm{d}x}\cdot(1-\cos\theta_1)\mathrm{d}\theta_1 = \frac{\delta_s}{\pi}(\theta_s - \sin\theta_s) + \frac{\delta_f}{\pi}(\theta_f - \sin\theta_f - \pi)$$

翼型的升力系数:

$$C_L = 2\pi(\alpha - \alpha_0) = 2\pi\alpha - 2\delta_s(\theta_s - \sin\theta_s) - 2\delta_f(\theta_f - \sin\theta_f - \pi)$$

对翼型焦点的俯仰力矩系数:

$$C_{mc} = \frac{\pi}{4}(A_2 - A_1) = -\frac{\delta_s}{2}\sin\theta_s(1-\cos\theta_s) - \frac{\delta_f}{2}\sin\theta_f(1-\cos\theta_f)$$

薄翼型小扰动绕流问题可以分解厚度问题和弯度问题,弯度问题通过布置连续涡得以解决,厚度问题要体现翼型对自由来流的"撑开"作用,一般采用布置连续源的方法进行分析。下面简单举例说明。

例 3.4 已知翼型半厚度曲线 $y_t(x)$,求解翼型厚度问题扰动速度势。

解:在 x 轴上分布单位长度强度为 $q(\xi)$ 的点源,产生的扰动速度势:

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{4\pi}\int_0^b q(\xi)\ln[(x-\xi)^2+y^2]\mathrm{d}\xi$$

求出 y 向扰动速度为:

$$v_y(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^b\frac{q(\xi)\cdot y}{(x-\xi)^2+y^2}\mathrm{d}\xi$$

为了确定点源强度 $q(\xi)$,需要求出 $v_y(x,0)$。考察上式发现,在 $y\to0$ 条件下,只有在 $\xi=x$ 处不为零,点源 $q(\xi)$ 连续,在 $\xi=x$ 的微小邻域内变化不大,可以用 $q(x)$ 近似;同时积分区域从 $[0,b]$ 变为 $[-\infty,+\infty]$ 也不影响积分值,因此有:

$$\lim_{y\to0+}\int_0^b\frac{q(\xi)}{2\pi}\cdot\frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}\mathrm{d}\xi=\frac{q(x)}{2\pi}\cdot\lim_{y\to0+}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}\mathrm{d}\xi$$
$$=\frac{q(x)}{2\pi}\cdot\arctan\frac{\xi-x}{y}\Bigg|_{-\infty}^{\infty}=\frac{q(x)}{2}$$

根据翼型绕流厚度问题的线化边界条件:$v_y(x,0)=\frac{q(x)}{2}=u_\infty\frac{\partial y_t}{\partial x}$,得到点源分布强度为:$q(x)=2u_\infty\frac{\mathrm{d}y_t}{\mathrm{d}x}$。

§3.3　鳞片法简介

对于采用速度势 Laplace 方程描述的翼型绕流问题,除了上面介绍的小扰动线化方法外,还有鳞片法(Panel method)。

速度为 u_∞、沿着 $-y$ 方向均匀来流经过位于 x 轴线上、原点两侧长度为 a 的平板,显然采用一个点源或点偶和均匀流的基本解叠加很难满足要求。如果在均匀流放置 5 个强度为 $Q/5$ 点源,得到的流动如图 3.6(a)示意,零流线对应的物体头部有些平直样子,但是呈现微小的波浪形;放置 100 个强度为 $Q/100$ 点源得到的流动如图 3.6(b)示意,显然改进了许多,但是在驻点附近零流线有一个凹陷;随着点源数目增加,零流线越来越接近物体平头形状。下面考虑极限情况,即布置连续的源。

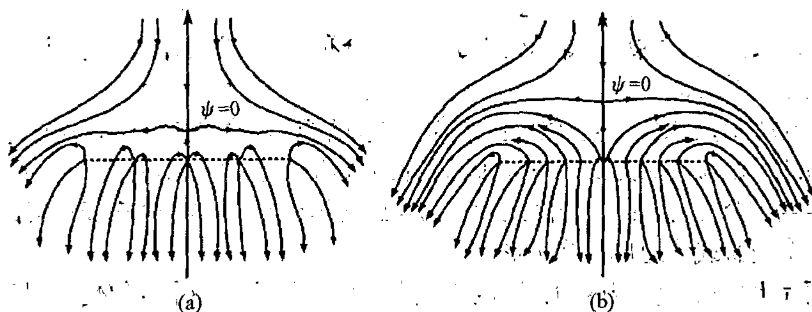


图 3.6　离散点源近似平板绕流

如图 3.7 所示,在 a 直线段上分布单位源强度为 σ 的点源,线段 $x=\xi$ 处微元 $\mathrm{d}\xi$ 源的强度为 $\sigma\mathrm{d}\xi$ 对线外点 $P(x,y)$ 所产生扰动速度为:

$$\mathrm{d}v_x=\frac{\sigma\mathrm{d}\xi}{2\pi}\frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+y^2}\qquad \mathrm{d}v_y=\frac{\sigma\mathrm{d}\xi}{2\pi}\frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}\tag{3.20}$$

由 $y=a$ 积分至 $y=a$ 得全部直线段上源对 $P(x,y)$ 点扰动速度:

$$\left.\begin{aligned}v_x(x,y)&=\frac{\sigma}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+y^2}\mathrm{d}\xi=\frac{\sigma}{4\pi}\ln\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}\\ v_y(x,y)&=\frac{\sigma}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}\mathrm{d}\xi=\frac{\sigma}{2\pi}\left[\arctan\frac{x+a}{y}-\arctan\frac{x-a}{y}\right]\end{aligned}\right\}\tag{3.21}$$

现在分析一下 $P(x,y)$ 位于直线段上的情况:

$$\left.\begin{aligned}v_y(x,0_+)&=\lim_{y\to0+}v_y(x,y)=\frac{\sigma}{2}\\ v_y(x,0_-)&=\lim_{y\to0-}v_y(x,y)=-\frac{\sigma}{2}\end{aligned}\right\}\tag{3.22}$$

显然取强度为 $\sigma=-2u_\infty$,在上物面可以满足法向速度为零的条件。连续直线源在均匀来流中形成流动如图 3.7 所示,从图中也可以看出在下表面不能满足法向速度为零的条件,因此采用以上方法只能得到平板迎风面的速度势,平板背风区的速度势是非物理的,对实际问题没有意义。

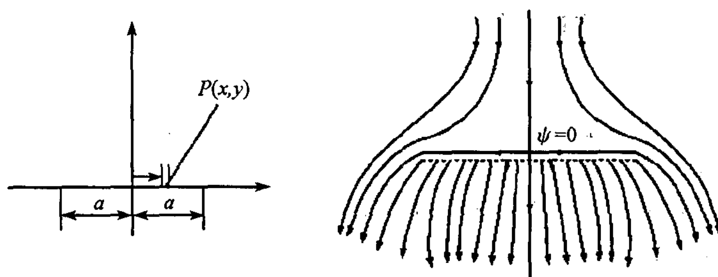


图 3.7　直线连续源以及在均匀来流中的平板绕流

对于任意形状的二维物体形成的封闭曲线,采用有限个直线段近似,在每一个直线段分布单位强度为常数的连续点源,不同的直线段上点源强度可以不同,根据物面外法向速度为零条件来确定点源强度;这些连续点源在封闭区域以外形成的扰动速度势非常接近物体的绕流速度势,从而可以预测物体的气动力分布,这就是鳞片法基本思想,下面简单介绍鳞片法求解过程。

如图 3.8 所示,选取物体表面一些点作切线,两相邻切线的交点称为边界点,两相邻边界点之间的线段就定义为面元(panels),各面元按顺时针方向排列,最后一个边界点和第一个边界点重合,这样对 m 个面元就有 $m+1$ 个边界点,这样物体表面形成的封闭曲线就变成了一个由直线段组成的多边形。

每一面元上分布单位强度为常数的连续点源引起的速度势来近似代替翼型。不妨令流场中第 j 面元起始坐标 (x_j,y_j)、分布的单位长度源强 σ_j、第 j 面元上坐标为 $(\bar{x}_j,\bar{y}_j)$ 到起始坐标的距离记为:

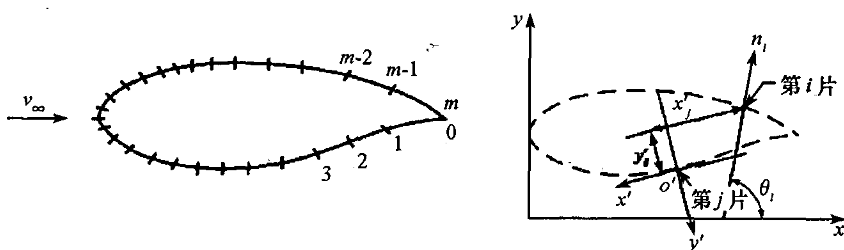


图 3.8　低速翼型绕流鳞片法求解

$$\bar{s}_j = [(\bar{x}_j - x_j)^2 + (\bar{y}_j - y_j)^2]^{1/2}$$

根据本章前面的知识，在$(\bar{x}_j, \bar{y}_j)$处微元 $d\bar{s}_j$ 包含的源强$\sigma_j d\bar{s}_j$，可以写出对第 j 面元的源在流场中任意一点(x,y)的诱导速度势为：

$$\varphi_j = \frac{\sigma_j}{2\pi}\int_j \ln r_j d\bar{s}_j \tag{3.23}$$

式中：$r_j = [(x-\bar{x}_j)^2 + (y-\bar{y}_j)^2]^{1/2}$为两点之间距离；积分沿第 j 面元从(x_j, y_j)到(x_{j+1}, y_{j+1})，直线长度记为：

$$S_j = [(x_{j+1} - x_j)^2 + (y_{j+1} - y_j)^2]^{1/2}$$

这样一来，x 轴向速度为 u_∞ 的直均流与 m 面元分布单位强度为常数连续点源叠加以后流动的速度势为：

$$\Phi(x,y) = u_\infty x + \sum_{j=1}^{m} \frac{\sigma_j}{2\pi}\int_j \ln r_j d\bar{s}_j \tag{3.24}$$

为了确定面元上单位长度上的源强 σ_j，在直线段上取一些观测点，有时称为控制点，这些点一般取直线的中点，设第 i 面元上控制点坐标为(x_{i0}, y_{i0})、其外法线向量 $\boldsymbol{n}_i$ 与 x 轴的夹角为 β_i。

物面边界条件要求合成流动在控制点上的法向速度为 0，即：

$$\left.\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial n}\right|_i = 0 \qquad (i = 1,2,\cdots,m) \tag{3.25}$$

将速度势表达式(3.24)代入上式，边界条件就可变为：

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\sigma_j}{2\pi} I_{ij} + u_\infty \cos\beta_i = 0 \qquad (i = 1,2,\cdots,m) \tag{3.26}$$

第 j 面元上单位强度的分布源在第 i 面元上控制点引起的法向速度：

$$I_{ij} = \left.\int_j \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}(\ln r_{ij}) d\bar{s}_j \right|_i = \int_j \frac{(x_{i0} - \bar{x}_j)\cos\beta_i + (y_{i0} - \bar{y}_j)\sin\beta_i}{(x_{i0} - \bar{x}_j)^2 + (y_{i0} - \bar{y}_j)^2} d\bar{s}_j \tag{3.27}$$

参看图 3.8，第 i 面元与 x 轴的夹角为 θ_i，就是物面控制点(x_{i0}, y_{i0})的斜率，外法线与均流方向的夹角为 β_i 之间，存在关系：

$$\beta_i = \theta_i + \frac{\pi}{2}, \quad \sin\beta_i = \cos\theta_i, \quad \cos\beta_i = -\sin\theta_i$$

第 j 面元上任一点坐标：

$$\bar{x}_j = x_j + \bar{s}_j\cos\theta_j$$
$$\bar{y}_j = y_j + \bar{s}_j\sin\theta_j$$

积分(3.27)式变为：

$$I_{ij} = \int_0^{s_j} \frac{C \cdot \bar{s}_j + D}{(\bar{s}_j)^2 + 2A \cdot \bar{s}_j + B} \mathrm{d}\bar{s}_j \tag{3.28}$$

其中：

$A = -(x_{i0} - x_j)\cos\theta_j - (y_{i0} - y_j)\sin\theta_j$

$B = (x_{i0} - x_j)^2 + (y_{i0} - y_j)^2$

$C = \sin(\theta_i - \theta_j)$

$D = -(x_{i0} - x_j)\sin\theta_i + (y_{i0} - y_j)\cos\theta_i$

如下关系成立：$4B - (2A)^2 > 0$，积分值 I_{ij} 表达式写为：

$$I_{ij} = 0.5\sin(\theta_i - \theta_j)\ln\left[1 + \frac{S_j^2 + 2AS_j}{B}\right] - \cos(\theta_i - \theta_j)\left[\arctan\left(\frac{S_j + A}{E}\right) - \arctan\left(\frac{A}{E}\right)\right]$$

其中：$E = (x_{i0} - x_j)\sin\theta_j - (y_{i0} - y_j)\cos\theta_j$。

如果 $j = i$，即第 i 面元源对面元本身控制点产生的扰动速度为，这时 $I_{ij} = \pi$。

实际应用中，引入无量纲量 $\sigma'_i = \dfrac{\sigma_i}{2\pi u_\infty}$ 之后，可写成更简单的形式：

$$\sum_{j=1}^{m} I_{ij}\sigma'_j = \sin\theta_i \qquad (i = 1,2,\cdots,m) \tag{3.29}$$

等价于在单位速度 $u_\infty = 1$ 均匀来流中产生的扰动势。在求得到无量纲面元强度 σ'_i 之后，将其代入速度势表达式中。而第 i 面元控制点(x_{i0}, y_{i0})处法向速度为 0，所以流场中控制点处仅有切向速度：

$$V_\tau\big|_i = \frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\tau}\bigg|_i \tag{3.30}$$

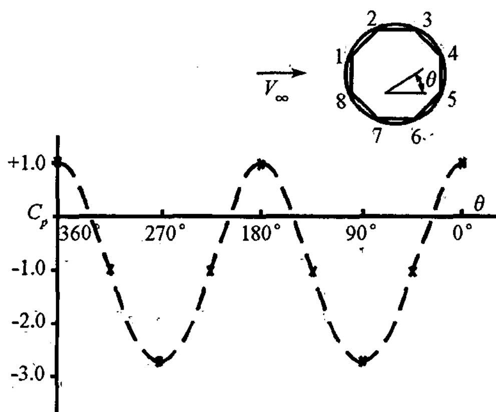


图 3.9　鳞片法计算圆柱绕流的压力系数分布

其中：τ 为切线矢量。求导以后，可得切向速度大小为：

$$V_\tau(x_i, y_i) = \cos\theta_i + \sum_{j=1}^{m} \lambda'_j I'_{ij} \tag{3.24}$$

切向速度 I'_{ij} 代表第 j 面元上单位强度的分布源对第 i 面元控制点切向速度的影响，当 $j=i$ 时，$I'_{ij}=0$ 外，其余积分值 I'_{ij} 下式给出：

$$I'_{ij} = -0.5\cos(\theta_i - \theta_j)\ln\left[1 + \frac{S_j^2 + 2AS_j}{B}\right] - \sin(\theta_i - \theta_j)\left[\arctan\left(\frac{S_j + A}{E}\right) - \arctan\left(\frac{A}{E}\right)\right]$$

外形给定以后，每个控制点上法线向量的 n_i 和 β_i 都是已知的，求得积分值 I_{ij} 后，就得到 m 个联立的代数方程组，求解 m 个面源强度 σ_i 后，就可以计算流场中任意点的速度和压力而得。下图是采用鳞片法计算圆柱绕流的压力系数；其中圆柱绕流的圆周分为 8 个直线段近似，与理论值 $C_p = 1 - 4\sin^2\theta$ 比较，可以看出二者较为一致。

§3.4　低速翼型气动力特性

以上对低速翼型的速度势理论及其应用进行介绍，在理论建模过程中引入许多与实际流动不符的假设，因此得到的气动力特性与实际情况必然存在一定差异，下面结合流动机理对低速翼型气动力特性进行分析，同时讨论速度势理论的应用范围。

正迎角情况下，翼型流谱如图 3.10 所示，根据无量纲分析可以说明，在低速气流中，流谱主要取决于迎角，与空气密度和飞行速度基本无关。无穷远速度为 u_∞，空气流受到翼型阻挡，到机翼前缘附近(不一定是前缘点)形成速度为零的驻点，分成上下两股流过上下翼表面。下面流线离开驻点流向后缘。上面流线离开驻点，先向前倒走一小段，然后绕过前缘，顺着上翼面向后缘流去；绕前缘约过 $x=0.30$(接近最大厚度位置)气流会达到很高的局部速度，速度峰值越大，压力系数越小；速度峰值对应于最低压力不像驻点有限制，可以达到很大的负值，理论上可以达到。在速度峰值以后是减速段，直到后缘处上、下翼面速度接近相等。

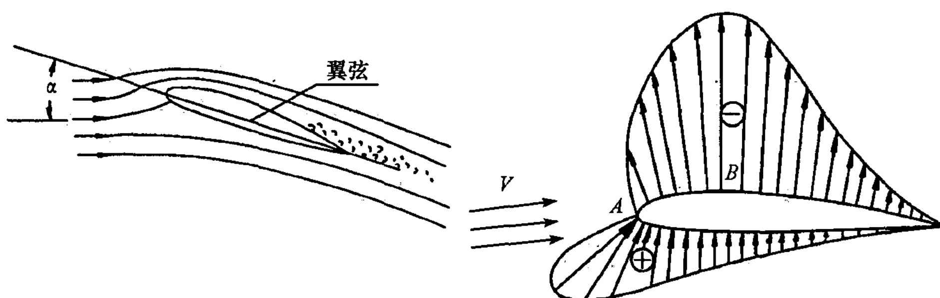


图 3.10　翼型流谱和用矢量法表示的翼型压力系数分布

压力系数的方向为表面法向，如果采用线段长度表示大小，指向外表示小于自由来流压力，为负值，指向里表示大于自由来流压力，为正值，正迎角情况下翼型压力系数分布如

图3.10所示。翼型上表面压力普遍小于自由来流压力，形成向上的"吸力"，一般情况下上表面所形成的"吸力"要占到总升力的60% ~ 120%；翼型下表面总有大于自由来流压力的区域，大部分情况产生向上的升力，有时在非常小的迎角情况下也产生向下的"吸力"，减小升力的作用。在某种意义上说，飞行器是被气流"吸"在天空的，而不是被气流"托"上天的。翼型厚度前半部分大，后半部分小，所以前半部分对升力的产生贡献最大。

前面采用小扰动线化速度势研究翼型绕流问题，得到的升力系数随迎角变化规律为斜率2π的直线；图3.11是通过风洞实验得出的某翼型的升力系数随迎角的变化曲线。小迎角范围C_L曲线基本是斜率接近2π的直线，随着迎角增大直线开始下弯，但升力系数还是随迎角增大的，直到达到了它的最大值，以后再增大迎角，C_L反而下降，这种现象称为翼型失速(stall)。升力系数曲线上最大值称为最大升力系数$C_{L\max}$，对应的迎角值$\alpha_{\max}$称为临界(失速)迎角。机翼的$C_{L\max}$是决定飞机起飞和降落性能的重要指标，在升力一定的情况下(必须等于飞机的重量)，升力系数C_L越大，速度可以越小，飞行越安全，跑道也可短一些。低速翼型失速主要与粘性有关，其流动机理大致如下：迎角增大到一定程度以后，由于存在逆压梯度，上翼面的附面层开始出现分离，分离区内气流和外面主流速度有明显差异，分离区内流速较低，这样在粘性的作用下形成回流，分离区内部的压力变化规律与速势流动理论预测出现较大差异。

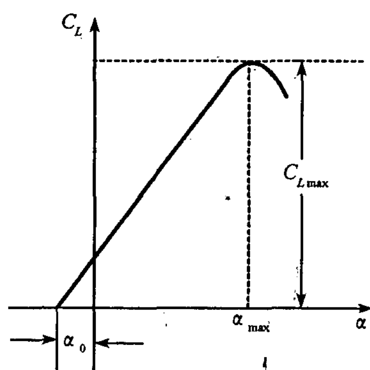


图3.11 翼型升力曲线

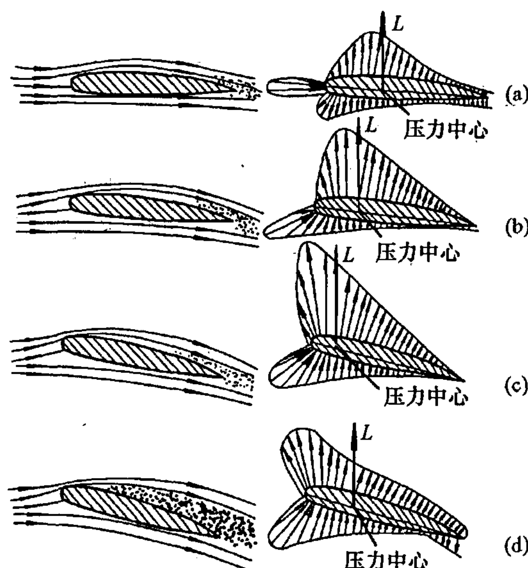


图3.12 迎角对翼型流谱的影响

图3.12给出了不同迎角下后缘分离翼型的流谱及表面压力分布情况。在小迎角范围内，前驻点在下表面距前缘点很近处，从而前缘处形成较大的正压力；在后缘处，上下表面两股气流平滑汇合；从最低压力点到后缘逆压梯度不严重，翼型附近流动无分离。随着迎角的增大，前驻点后移，绕前缘的流线更加弯曲，流速更加快，迎角越大，驻点越靠后，局部速度越大，最低压力点越靠前缘；翼型前缘的形状越尖，或者前缘的曲率半径越小，达到

的速度峰值越高，最低压力点的值越小，上下表面两股气流到达后缘处压力系数基本上恢复到自由来流值，因此会产生严重逆压梯度，导致发生流动分离，这时升力随迎角的增长而下降，呈非线性关系。当迎角达到临界迎角后，继续增大迎角，分离点迅速前移，涡流区迅速扩大，致使翼型上表面流速减慢，压力系数降低，从而导致升力减小。

根据分离位置的不同，翼型大迎角分离形式分为三种。

如图 3.11 所示的升力曲线一般是后缘分离产生的，其原因是翼型较厚，速度发展比较缓慢，最低压力点靠近前缘，在翼型头部有一小段层流附面层，然后在最低压力点附近转捩为紊流附面层。由于紊流附面层内有较大的动能，紊流附面层分离是随着迎角增大而逐渐由后向前发展，使得迎角达到临界迎角后，升力系数下降比较缓和。

尖头或前缘半径很小的薄翼型，气流以一定迎角流过较尖前缘时，由于前缘处速度很大而产生很大的负压力，但前缘后压力又回升，因而在前缘附近形成高的逆压梯度产生附面层分离。但分离后接着发生附面层转捩，附面层由层流变为紊流，"忍受"逆压梯度能力增强而使附面层重新附体，这样在分离点和附体点之间就形成一个局部分离区，称为气泡，这种气泡一旦形成就较长。随迎角增大，分离点仍在前缘，而附体点逐渐后移，气泡增长，所以称为长泡分离。由于长泡分离是逐渐发展的，所以迎角达到临界迎角后，升力系数下降并不突然。

尽管长泡分离和后缘分离情况下升力系数下降都较为平缓，但是分离的形态不同压力系数分布存在较大的差异，如图 3.13 所示，因此俯仰力矩特性不同。

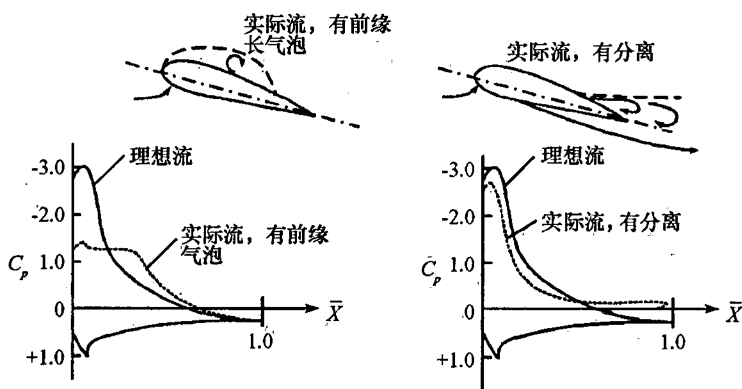


图 3.13　长泡分离和后缘分离比较

中等厚度翼型，在中等雷诺数下，会发生短泡分离，它与长泡分离的区别是：由于翼型表面曲率较大，故随迎角增大，最低负压区前移，分离点前移，转捩点也前移，使分离区缩短，故称为短泡分离。前缘出现短泡分离时，升力系数几乎仍然是线性变化，迎角达到临界迎角，气泡破裂，分离的气流不再附体，升力系数突然下降。长泡分离和短泡分离升力曲线差异如图 3.14 所示。

造成翼型失速现象最主要的因素除了飞行迎角，还与飞行雷诺数和翼型表面光洁度有密切关系；另外，翼型失速以后恢复过程可能不是可逆的，即发生失速以后减小迎角对应的升力系数不一定还是图 3.14 中增加迎角过程中的升力系数。如图 3.15 所示，随着

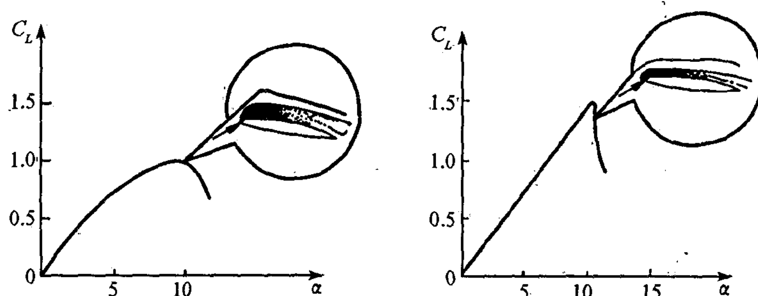


图 3.14　翼型升力曲线(长泡分离和短泡分离)

迎角增加开始发生失速,升力系数从点 A 迅速降为点 B,这时如果减小迎角,升力系数不是沿原来的曲线从点 A 回到点 D,而是从点 C 恢复点 D 以后才与增加迎角过程的变化曲线一致。

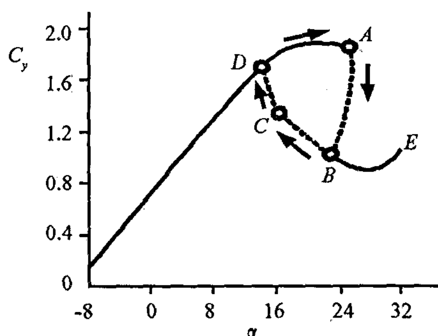


图 3.15　翼型升力曲线形成的滞止环

为了改善飞机起飞和降落性能,增大机翼的 $C_{L\max}$,发展了各种各样的增升装置,其中应用最多、技术最成熟的是后缘襟翼(flap),如图 3.16 所示。襟翼是一块可以转动的小翼片,平时收起,使用时放下;襟翼的弦长从 20% 到 40% 机翼弦长不等,襟翼的下折角最大可达 60°。简单襟翼,是原翼型的一部分,它围绕自身前缘附近有铰链转动;分裂式襟翼附于翼型的下表面,使用时转下来;这两种襟翼使用时面积不变,在保持翼型的迎角不变的条件下,局部改变翼型的弯度,最大下折角 60°,提高升力可达 90%。富氏襟翼和柴浦襟翼结构相似,使用时都是沿着滑轨既下折又后退,在改变翼型弯度同时增大了翼面积,如果襟翼后伸 $\bar{b}_f\%$ 弦长,增加面积至少可使升力提高 $(1+\bar{b}_f\%)$ 倍。开缝襟翼包括单缝和多缝,双缝襟翼有一小一大两块活动翼片,小的那块平时完全缩在槽内,使用时沿滑轨向后退,小块与主翼之间,大块与小块之间,都有通气流的缝隙;两块都作圆头尖尾的翼型状,放下使用时等于多件翼的组合,比单翼的升力系数大。还有利用高速气流的引射作用的吹气式襟翼和喷气式襟翼,后者没有传统意义上的襟翼面和铰链等部件。这些后缘襟翼工作时,通过面积和弯度改变,提高翼型的环量,从而获得升力的增加,工程上襟翼作用可以简化为在后缘增加一个点涡。

为了改善前缘气泡分离特性,延缓失速的到来,还有前缘上也可以加子翼的增升设

备,如前缘襟翼和前缘缝翼(slat),前者是固定的,后者是可收可放的;还有克鲁格式前缘襟翼,它是贴在主翼上的薄片,使用时打开,这种办法对主翼强度结构设计有利,执行机构上也易于实现。

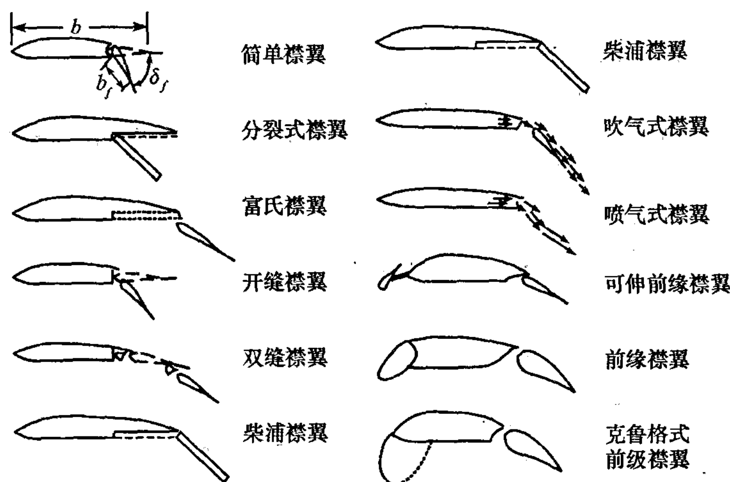


图 3.16　机翼的襟翼

翼型阻力特性的研究和预估理论简单介绍如下。

低速翼型的阻力是由空气粘性引起的,它包括摩擦阻力和压差阻力两部分,典型的翼型阻力系数与迎角的关系如图 3.17 所示,当迎角不大时,摩擦阻力是型阻的主要成分,随迎角的增大,压差阻力上升为翼型阻力的主要成分,当翼型发生失速,表面气流出现严重分离,压差阻力急剧增大。虽然翼型阻力特性可用以迎角为横轴的曲线表示,但工程应用中更常用以阻力为横轴、升力为纵轴表示,称为极曲线,可以直观表示翼型获得升力需要克服的阻力。如图 3.18 所示,失速前翼型极曲线接近一条抛物线,图中 $C_L=0$ 处阻力系数称为零升阻力系数 C_{D0},极曲线上任一点 P 与原点连线与横轴夹角定义翼型的升阻比:$K=\tan\varphi=C_L/C_D$,K 的最大值翼型的最大升阻比,是衡量翼型升阻特性的重要指标之一,性能优良的翼型可达 50 以上。

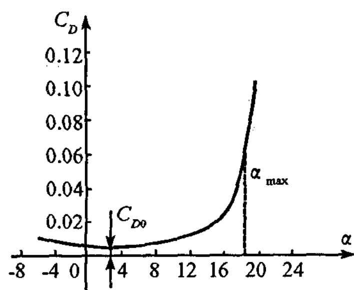


图 3.17　C_D 随 α 变化曲线

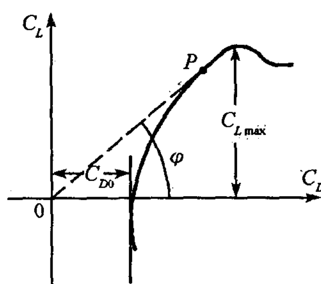


图 3.18　翼型极曲线

流体粘性对阻力的影响不容忽视,以上速度势理论原则上不能用于翼型阻力预测,下面介绍根据理论分析建立的所谓"前缘吸力"模型在实际流动中是不存在的。气流绕过前

缘加速，压力不断降低，在速度峰值处达到极小值；在最大厚度以后，直到后缘处气流减速，压力从极小值逐步恢复接近来流压力。上下翼面压力差在气流方向投影沿 y 轴积分为翼型阻力，从下图 3.19 所示，可以看出在前缘气流压力的合力为负值，产生所谓的“前缘吸力（C_T）”，最大厚度以后气流压力的合力为正值；根据 D'Alember 疑题，速势流中物体阻力为零，两块面积，正好抵消。

翼型厚度越小，前缘曲率半径越小，压力系数的极小值越小；对于翼型厚度为零、尖前缘翼型，理论上压力系数趋向 $-\infty$，作用面积趋向 0。为了符合 D'Alember 疑题要求，可以推断出：前缘点趋向 $-\infty$ 压力系数和趋向无穷小作用面积产生一个有限值吸力，来抵消翼型其他部分产生阻力。

对于平板翼型，前缘吸力：$C_T = C_L \cdot \sin\alpha \approx C_L \cdot \alpha$。

前缘吸力是在无粘小扰动假设条件成立的流场中推断出的理论模型，实际流动中翼型厚度不可能为零，翼型表面也并不存在压力系数为 $-\infty$ 的点。

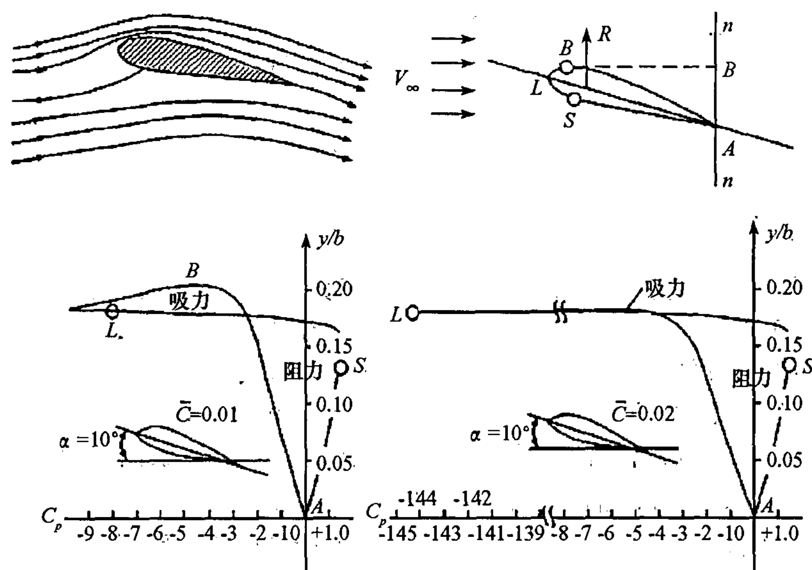


图 3.19　前缘吸力理论模型

以上主要讨论了翼型的定常流动，在非定常情况下，翼型的气动特性更为复杂。NACA0012 对称翼型在定常情况下小迎角升力线斜率为 2π、在 $\alpha = 0$ 处升力系数为零，但是在受迫正弦振荡过程中，升力随迎角的变化如图 3.20 所示，可以看出升力系数不但与迎角有关，还与运动经历相关，从正迎角经过 $\alpha = 0$ 是升力系数大于零，从负迎角经过 $\alpha = 0$ 是升力系数小于零。

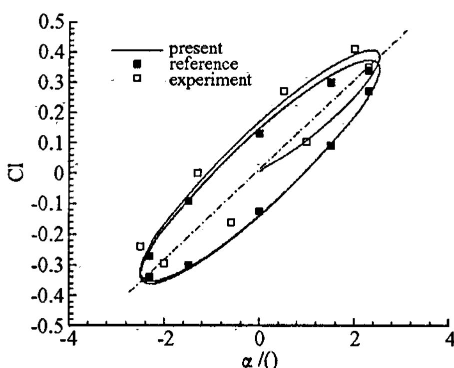


图 3.20　翼型受迫正弦振荡升力随迎角的变化

本章小结

线化边界布涡线，积分方程级数解；
升力斜率不改变，压心焦点有区别；
厚度问题布鳞片，有限点上方程建。
飞机升空靠吸力，分离失速减升力；
线化理论无阻力，动态特性待努力。

习　题

3－1　推导长度为 $2a$、单位长度源强为 σ、端点位于 $A(x_1,y_1)$ 和 $B(x_2,y_2)$ 的连续源产生的速度势。

3－2　证明：翼型弯度问题在体轴系下物面线化边界条件为：

$$v_y(x,0)=u_\infty\left(\frac{\partial y_c}{\partial x}-\alpha\right)$$

3－3　翼型由抛物线 $4cx^2=b^2(c-y)$ 和 x 轴围成，写出厚度分布 $y_t(x)$ 和弯度分布 $y_c(x)$，求厚度问题和弯度问题小扰动速势 φ_t 和 φ_c。

3－4　对称薄翼型，其后部 1/4 弦长为襟翼，襟翼中线也为一直线；低速飞行，迎角为 $\alpha=2°$，求襟翼下偏 $\delta_z=3°$ 时，零升迎角、升力系数、相对前缘点力矩系数、相对压心力矩系数和相对焦点力矩系数，求压心和焦点相对位置。

3－5　对称薄翼型，其后部 1/8 弦长为襟翼，低速飞行，迎角为 $\alpha=0$，画出升力系数和相对焦点力矩系数 m_z 改变量与襟翼下偏角的关系。

（提示：推导通用关系式，取 $\delta_z=2°$、$\delta_z=4°$ 和 $\delta_z=6°$ 标示）。

3－6　求如图题 3－6 所示薄翼型的升力线斜率、零升迎角和力矩系数。

图题3-6

3-7　平板翼型的升力可以采用焦点位置的点涡等效,定性画出这两个流场。

3-8　简单说明采用鳞片法计算翼型气动力的求解过程。

3-9　证明:鳞片法计算得到控制点切向速度大小为:

$$V_\tau(x_i, y_i) = \cos\theta_i + \sum_{j=1}^{m} \lambda'_j I'_{ij}$$

3-10　简单说明翼型失速现象的流动机理。

3-11　如何根据翼型升力系数曲线变化规律判断引起失速现象的分离形式?

3-12　为何要改善翼型接近失速迎角时的升力特性?

3-13　简单说明利用襟翼增升的主要原理;工程上有哪些襟翼布局?

3-14　简单说明前缘吸力模型。

3-15　飞行过程中迎角为 $\alpha = 0$ 对称薄翼型的升力一定为零么?

3-16　在 x 轴上线段[0, c]分布强度为 $q(x)$ 的连续源,写出对应的速度势和流函数;如果和 $V_x = u_\infty$ 的均匀流叠加,求经过驻点的流线方程。

(提示:$\psi(x, y) = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^c q(\xi)\arctan\dfrac{y}{x-\xi}\mathrm{d}\xi + u_\infty y$ 的流线$\int_0^c q(\xi)\mathrm{d}\xi = 0$)

第四章　低速流动中机翼气动力预测方法

前面已经建立机翼小扰动速度势理论，薄翼小扰动绕流问题可以分解为厚度问题和弯度问题；由于速度势理论难以估算粘性阻力，所以主要用来预测升力特性，同时由于厚度问题流场的对称性，对机翼升力没有贡献，所以经常不考虑。给定机翼弯度问题的中弧面方程，在体轴系下，小扰动速度势满足 Laplace 方程：

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}=0 \tag{4.1}$$

远场条件：$\varphi=0$，后缘满足 Kutta－Joukowski 条件；物面线化边界条件：

$$v_u(x,0,z) \doteq u_\infty\left(\frac{\partial y_c}{\partial x}-\alpha\right) \tag{4.2}$$

上一章中介绍翼型弯度问题的两种处理方法：一种是采用把翼型线化处理到 x 轴上，布置强度为 $\gamma(x)$ 连续涡；另一种鳞片法是分段布置连续源 σ_i 来近似翼型曲线；这两种方法本质上都是在流场中分布满足 Laplace 方程基本解，根据翼型物面边界和后缘条件确定基本解中待定系数（涡强、源强），来近似翼型存在对均匀流场的扰动。

翼型相当于展向无限长的机翼，因此布置的连续涡垂直于翼型剖面，沿展向（z 轴方向）从无穷远处来，延伸到无穷远处去，涡服从 Helmholtz 定理。但是，机翼展向有限长，根据流体力学理论，物体从流场中获得的升力和流体绕物体形成的环量相互对应，在机翼平面以外空间不会产生升力，也不存在与来流相垂直的涡；因此，为了满足 Helmholtz 定理，导致机翼升力的附着涡只能像前面介绍的马蹄涡一样，与自由涡相连接，从无穷远处来，延伸到无穷远处去，由于自由涡不产生升力，只能沿流向平行于自由来流（x 轴方向）。

这一理论分析与实验观测现象完全一致。如图 4.1 所示，在一大展弦比直机翼的后缘上，沿其展向均匀地贴上一排丝线，在丝线的末端系着小棉花球，然后将机翼以小迎角置于低速风洞中，可以看到在机翼对称面两侧棉花球方向相反的旋转，而且靠翼梢的棉花球比靠近对称面的棉花球旋转得快。如果采用烟流显示，可以得到如图 4.1 所示的流线，上表面的流线向对称面偏斜，下表面的流线向翼梢偏斜，而且这种偏斜从机翼的对称面向翼梢逐渐增大。在实验中还进行表面压力测量，得到压力系数分布如所示，在翼梢处由于上下表面均压作用强，上下表面压力差为零，而在对称面处其翼梢效应最弱，上下表面压力差最大。

根据以上实验观测，上下翼面气流在机翼后缘汇合时，尽管压强一样，但展向分速是相反的，所以在后缘处要拖出轴线几乎与来流方向平行的旋涡组成的涡面，称为自由涡面（trailing vortex sheet）。因为气流的偏斜从机翼对称面到翼梢是逐渐增大的，所以自由涡面

在两翼梢处的旋涡强度也较大。由于旋涡的相互诱导作用,在离开后缘较远的地方自由涡面将卷成两条方向相反的涡索,其轴线大致和来流平行,如图 4.2 所示,自由涡面构成了三维机翼的流态与二维机翼流态的主要差别。

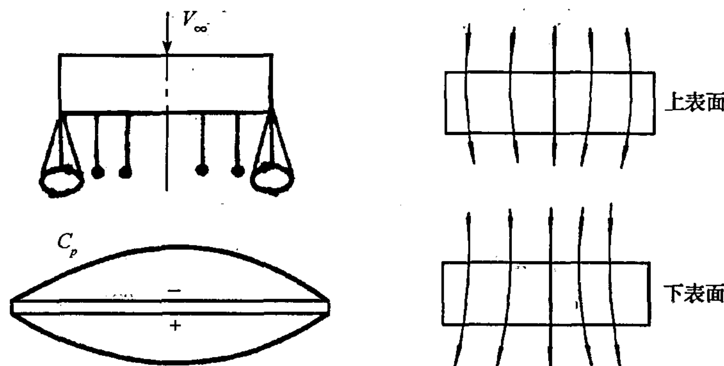


图 4.1 机翼后缘上涡的丝线实验、压力系数分布和上下表面流线示意图

根据上述理论上分析和流动特点,三维机翼除了附着涡面外,还应多出一个从后缘拖出的自由涡面,因此有限翼展机翼在直匀流中的绕流模型应是:直匀流 + 附着涡面 + 自由涡面。

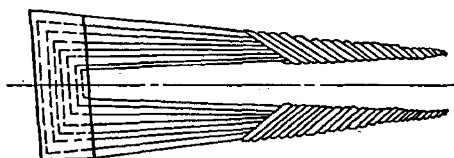


图 4.2 机翼附着涡和自由涡面示意图

§4.1 升力面理论

对于翼型,采用分布与展向平行的旋涡来代替翼型在均匀流中产生的扰动作用,机翼升力是由一系列连续的翼型剖面贡献的升力组成的,因此也可以采用旋涡来代替。布置在机翼产生升力的旋涡称为附着涡面。机翼除了附着涡面外,还应多出一个从后缘拖出的自由涡面,根据漩涡定理,自由涡面的环量等于附着涡面的环量。因此,采用基元涡来描述机翼在直匀流中的绕流模型最合适。

从前面推导可以得到,在风轴系下 $y=0$ 平面机翼平面形状上布置连续基元涡,在空间任一点引起的扰动速度势:

$$\varphi(x,y,z) = \iint_S \frac{\gamma(\xi,\zeta)}{4\pi} \frac{y}{y^2+(z-\zeta)^2}\left[1+\frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+(z-\zeta)^2}}\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\zeta$$

在机翼物面边界条件线化 $y=0$ 平面的扰动速度:

$$v_y(x,0,z)=\iint_S \frac{\gamma(\xi,\zeta)}{4\pi}\frac{1}{(z-\zeta)^2}\left[1+\frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+(z-\zeta)^2}}\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\zeta$$

代入线化边界条件：

$$\frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{\gamma(\xi,\zeta)}{(z-\zeta)^2}\left[1+\frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+(z-\zeta)^2}}\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\zeta=u_\infty\frac{\partial y c}{\partial x}\tag{4.3}$$

上式称为升力面基本方程。

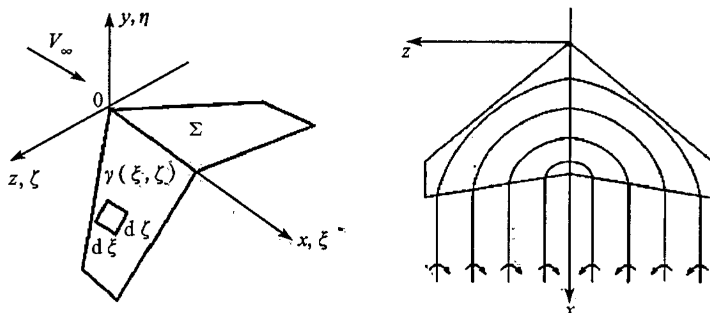


图 4.3　升力面理论模型

升力面理论模型如图 4.3 示意，为了表述和作图方便，在右图中保留机翼，实际上采用基元涡形成升力面代替机翼后，流场中不再有机翼。下同。

当给定机翼几何形状和来流迎角以后，原则上可以解出环量分布来，有了环量分布就可求出机翼的升力等气动力。尽管在数学形式上，以上升力面基本方程(4.3)比小扰动速度势方程(4.1)简化许多，但是，要得到积分方程的解析解也是较为困难的，因此实际应用中也是采用进一步简化方法，或者用数值方法求解。

上一章中二维翼型物面形成封闭曲线，采用有限个直线段分布单位强度为常数连续点源的鳞片法求解。对于机翼问题存在自由涡面，根据鳞片法思想发展了涡格法。早期广泛应用主要有 Falkner 和 Weissinger 涡格法模型。Falkner 将环量沿展向的连续变化近似为阶梯状环量分布，在弦向用四个与展向平行的附着涡来代替弦向连续分布的涡线，在每条附着涡的两端点拖出沿着来流方向伸向无穷远自由涡。Weissinger 把上述离散的附着涡线进一步简化，如图 4.4 所示。由前面翼型线化理论推导出，如果采用位于焦点(气动中心)1/4 弦长点涡来模拟低速翼型的升力，那么在 3/4 弦长点上，涡的诱导速度与自由来流速度在平板法线方向分速度大小相等、方向相反，合速度为零，自然满足物面边界条件；因此，把附着涡集中在机翼的翼型剖面 1/4 弦线的联线上，并选取 3/4 弦线上的点作为满足边界条件控制点。

由于高速数字电子计算机的广泛应用，展向和弦向分布的离散马蹄涡可以取很多，形成较为通用的涡格法(Panel method)及其软件，至今依然在飞行器设计中，尤其在总体方案论证过程中的布局研究阶段发挥着重要作用。下面对涡格法应用过程做些简单介绍。

首先，在线化机翼平面内，将机翼平面沿着来流方向(即弦向)划分列，然后沿着等百分比弦长的位置划分行，得到一系列梯形网格；在该网格上分布一定强度的马蹄涡，如图 4.5 所示。

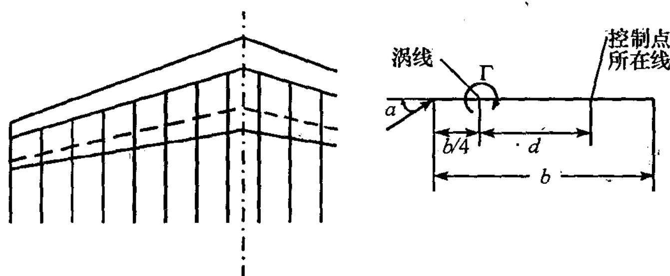


图 4.4 Weissinger 涡格法示意图

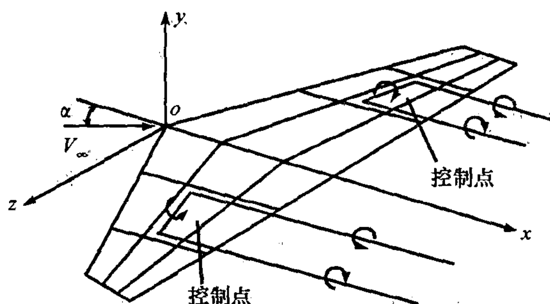


图 4.5 涡格法的模型

如果将机翼划分了 n 个网格，为便于计算气动力系数，对第 j 个马蹄涡 Γ_j，引入无量纲环量涡强度为 γ_j，这里 $\gamma_j = \Gamma_j/(l \cdot u_\infty)$，$l$ 是翼展长度；前面已经推导得到第 j 个马蹄涡在空间任意点 $P(x,y,z)$ 处扰动速度，整理成如下形式：

$$\left.\begin{aligned}\frac{u_j(x,y,z)}{u_\infty} &= k_u(x_{j1},y_{j1},z_{j1},x_{j2},y_{j2},z_{j2},x,y,z)\cdot\gamma_j \\ \frac{v_j(x,y,z)}{u_\infty} &= k_v(x_{j1},y_{j1},z_{j1},x_{j2},y_{j2},z_{j2},x,y,z)\cdot\gamma_j \\ \frac{w_j(x,y,z)}{u_\infty} &= k_w(x_{j1},y_{j1},z_{j1},x_{j2},y_{j2},z_{j2},x,y,z)\cdot\gamma_j\end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

机翼平面内每一个梯形网格近似看作一个小的翼型，也取第 i 个网格 3/4 弦长的中央位置作为控制点，第 j 个马蹄涡对第 i 个控制点 y 方向的诱导速度为：

$$\frac{v_j(x_{i0},0,z_{i0})}{u_\infty} = (k_v)_{i,j}\cdot\gamma_j \qquad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{4.5}$$

全部马蹄涡对该点诱导速度为：

$$\frac{v_j(x_{i0},0,z_{i0})}{u_\infty} = \sum_{j=1}^{n}[(k_v)_{i,j}\cdot\gamma_j] \qquad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{4.6}$$

根据线化边界条件，在体轴系下满足：

$$\sum_{j=1}^{n}[(k_v)_{i,j}\cdot\gamma_j] = \left.\frac{\partial y_c}{\partial x}\right|_i - \alpha \qquad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{4.7}$$

这样建立 n 阶线性代数方程组，可以求出每个马蹄涡强度 γ_j。

实际应用中，在没有侧滑的情况下，利用机翼的对称性，布置马蹄涡也有对称性，即左右半翼上对应的马蹄涡大小相等、方向相反，利用这一特点可使求解变量（线性代数方程组阶数）减少一半。

以上方法也适用于有上反角和扭转角的机翼，只要把边界条件适当修改就可以了。

如图 4.6 所示，求出第 j 个网格内马蹄涡强度为 γ_j，这一个马蹄涡的自由涡线部分与自由来流平行，对升力没有贡献，附着涡中产生的升力的大小：

$$\mathrm{d}Y_j = |\rho V \times (\Gamma_j \cdot \mathrm{d}s)| = \rho \cdot u_\infty^2 \cdot \gamma_j \cdot l_j \cdot \mathrm{d}z \tag{4.8}$$

这里 $\mathrm{d}z$ 为附着涡段 $\mathrm{d}s$ 在展向的投影，即第 j 个网格展向长度；l_j 是第 j 个网格的平均弦长，如果当地弦长为 $b(z)$、流向 m 行网格是均分的，则 $l_j = b(z)/m$。

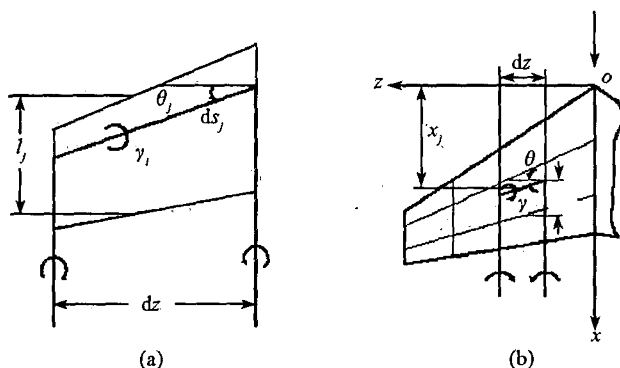


图 4.6　计算网格单元升力和机翼俯仰力矩

对沿流向 m 行网格的升力叠加，得到沿展向剖面的气动载荷：

$$\mathrm{d}Y(z) = \sum_{j=1}^{m} \rho \cdot u_\infty^2 \cdot \gamma_j \cdot l_i \cdot \mathrm{d}z \tag{4.9}$$

当地剖面升力系数：

$$C_{L(2)}(z) = \frac{\mathrm{d}Y(z)}{0.5\rho \cdot u_\infty^2 \cdot b(z) \cdot \mathrm{d}z} = \frac{2l_i}{b(z)} \sum_{j=1}^{m} \gamma_j \tag{4.10}$$

沿展向网格列数为 n，机翼升力系数 C_L：

$$C_L = \frac{2}{S} \sum_{i=1}^{n} [C_{L(2)}(z)] b(z) \mathrm{d}z \tag{4.11}$$

式中 S 为机翼的面积。

以机翼顶点为参考点关于 z 轴的展向剖面俯仰力矩系数：

$$C_{mz(2)}(z) = \frac{-\sum_{j=1}^{m} x_j \cdot \rho \cdot u_\infty^2 \cdot \gamma_j \cdot l_j \cdot \mathrm{d}z}{0.5\rho \cdot u_\infty^2 \cdot b^2(z) \cdot \mathrm{d}z} = -\frac{2l_j}{b^2(z)} \sum_{j=1}^{m} x_j \cdot \gamma_j \tag{4.12}$$

和机翼的俯仰力矩系数：

$$C_{mz} = \frac{2}{S \cdot b_A} \sum_{i=1}^{n} [C_{mz(2)}(z)] b^2(z) \mathrm{d}z \tag{4.13}$$

由于其它 $n-1$ 个马蹄涡的存在，在第 j 个网格位置当地速度已经不再是自由来流速

度，马蹄涡的合力方向也不再垂直于自由来流速度；如果按照当地速度求第 j 个网格位置马蹄涡合力，然后进行分解，得到的升力和以上直接采用自由来流速度计算升力一样，这是由于扰动速度垂直于线化机翼平面，当地速度在 x 方向投影就是自由来流速度。合力在流向的分量称为诱导阻力，是当地速度在 y 方向投影，即扰动速度和马蹄涡产生的力；原则上同样也可以求诱导阻力，但是应用中一般采用以下升力线理论建立的与升力之间的简单关系给出。

下面介绍两个计算实例。

如图 4.7 所示平板后掠翼，上反角为零，弦比 $\lambda = 3.5$、根梢比 $\eta = 5$，半展长 $l/2 = 0.655\text{m}$、前缘后掠角 $\chi_0 = 45°$。在后掠翼上展向和弦向等距分布马蹄涡，行数为 10，列数为 5，采用以上升力面方法计算升力线斜率 $C_L^\alpha = 0.0450$/度。根据中国空气动力研究与发展中心低速所的实验数据，在小迎角线性范围内整理得到的升力线斜率 $C_L^\alpha = 0.0484$/度。

理论上，马蹄涡数目越多，计算结果越精确，但是实际情况并非如此。为了考察布置的马蹄涡数目对计算结果的影响，先固定列数为 20，行数由 5 变化到 600，发现计算结果变化很小；再固定行数 20，列数由 5 变化到 600，对计算结果有一定影响，计算过程数据采用双精度存储运算，误差有所改善。考察以后发现，增加列数以后，在相邻控制点引起的诱导速度相差较少，使得求解马蹄涡强度 γ_j 建立 n 阶线性代数方程组的矩阵条件数变大。因此，采用涡格法计算机翼气动力特性，需要合理分布马蹄涡，同时建议考察马蹄涡数目对结果的影响。

通过和实验数据的细致比较，考察平板后掠翼平面形状参数对涡格法计算精度的，发现计算与实验结果的误差随展弦比、根梢比和前缘后掠角的增加而减少，对于大展弦比的直机翼的升力特性有较高的预测精度。

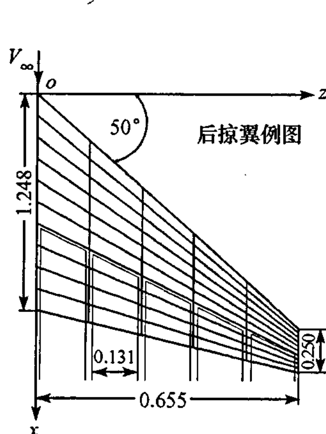


图 4.7 涡格法求解平板后掠翼的升力特性

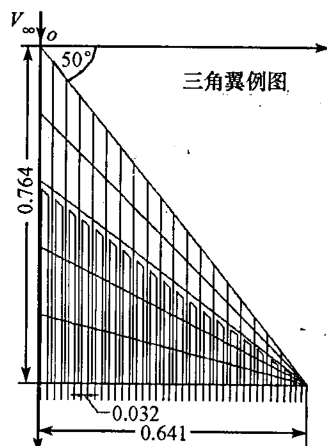


图 4.8 涡格法求解三角翼的升力特性

如图 4.8 所示平板三角翼，展弦比为 $\lambda = 3.3563$，半展长为 $l/2 = 0.641\text{m}$，前缘后掠角 $\chi_0 = 50°$。在后掠翼上等距分布马蹄涡，行数为 5，纵数为 20，升力线斜率的实验结果为 $C_L^\alpha = 0.0493$/度，用以上涡格法计算结果为 $C_L^\alpha = 0.0532$/度。可以看出，采用涡格法求解较大

后掠角的机翼升力，产生较大误差，表明这一方法存在一定的应用局限性，其原因在本章最后一节讨论。

隐身技术已成为现代航空飞行武器研制的关键技术之一。研究表明，采用合理地设计气动外形来减少主要威胁方向上的电磁波散射强度是降低雷达散射截面、提高隐身性能的一种很有效的方法。现代隐身飞机大多采用多平面、翼边缘小折角、锯齿状后缘等外形设计原则。

如图 4.9 所示，美国隐身战略轰炸机 B－2 采用独特的拐折翼布局，利用后缘安装有 8 个操纵面(6 个升降副翼和 2 个方向舵)，无明显机身和尾翼，最大限度地减少了该机的雷达、红外、电光特性，在正常探测距离下，B－2 的雷达散射截面与一只小鸟相当。

对图 4.7 所示后掠翼进行修形，得到图 4.10 所示拐折翼。布置行数为 20、列数为 20 马蹄涡，采用以上涡格法计算升力线斜率 $C_L^\alpha = 0.0596$/度；实验结果为 $C_L^\alpha = 0.0468$/度。

采用涡格法对中国空气动力研究与发展中心低速所进行的近 20 种机翼布局实验的计算，通过比较小迎角范围内升力线斜率，发现如果合理布置马蹄涡行数和列数，绝对值误差可以在 10% 以内，表明升力面理论的预测精度还可以用于工程应用。

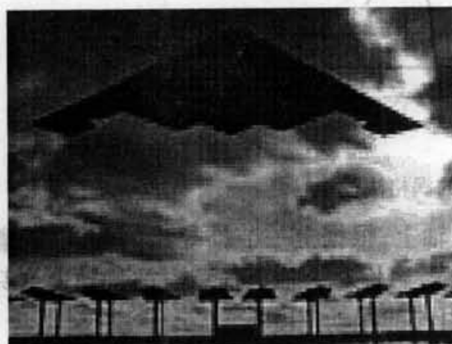


图 4.9　隐身战略轰炸机 B－2 布局

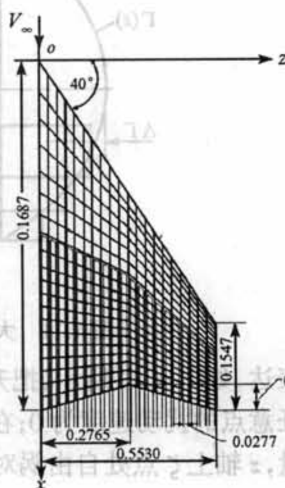


图 4.10　涡格法求解拐折翼的升力特性

§4.2　升力线理论

在速度势理论指导下，机翼采用附着涡，为了满足 Helmholtz 定理，增加了自由涡面，按照以上升力面理论模型，在机翼平面布置基元涡来代替机翼对流场产生的扰动，建立了升力面基本积分方程(4.14)式。为了求出给定几何参数的机翼升力，布置离散的马蹄涡近似连续的基元涡，选择有限控制点近似整个机翼物面边界条件，使积分方程变为线性方程组，这是所谓格子法求解。机翼格子法与翼型鳞片法原理一致，二者求解过程相似。

如图 4.11 所示，对于大展弦比直机翼，采用 Weissinger 升力面简化模型划分网格以

后，得到的网格接近矩形，各翼剖面 1/4 弦长点连线是直线段，马蹄涡的附着涡线平行于 z 轴。如果马蹄涡强为 $\Gamma(z)$，考察沿着展向两个马蹄涡相邻的两条自由涡线，方向相反，对机翼上其他点的作用相互抵消一部分，因此两条自由涡线相当于一条涡强为 $\Gamma(z+\mathrm{d}z)-\Gamma(z)$ 涡线产生的扰动。如果网格数目趋于无穷、网格尺度趋向 0，自由涡线成为自由涡面，自由涡面的涡强采用微分表示形式：

$$\mathrm{d}\Gamma(z)=\frac{\mathrm{d}\Gamma(z)}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z=\gamma(z)\cdot\mathrm{d}z$$

这样一来，机翼可以采用放置在 1/4 弦点连线上单位长度涡强为 $\gamma(z)$ 基元涡代替。机翼升力由附着涡产生，习惯上称 1/4 弦点连线为升力线；由于 $\gamma(z)$ 和 $\Gamma(z)$ 具有以上关系，只需确定附着涡强度 $\Gamma(z)$ 就可以得到机翼升力。求解 $\Gamma(z)$ 可以采用以上升力面理论的格子法，但是采用下面介绍的根据机翼平面形状参数直接给出 $\Gamma(z)$ 分布的升力线理论更为简便。

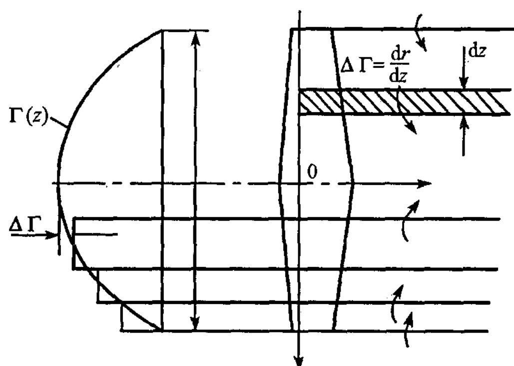


图 4.11　大展弦比直机翼的涡格法模型

为便于表达，如图 4.12 所示，把升力线放在 z 轴上，根据上一节推导出的公式，附着涡对 z 轴上任意点的扰动速度为 0；在风轴系下，自由涡相对 z 轴上任意点的扰动速度只有 y 方向分量，z 轴上 ζ 点处自由涡对升力线 z 点引起的扰动速度：

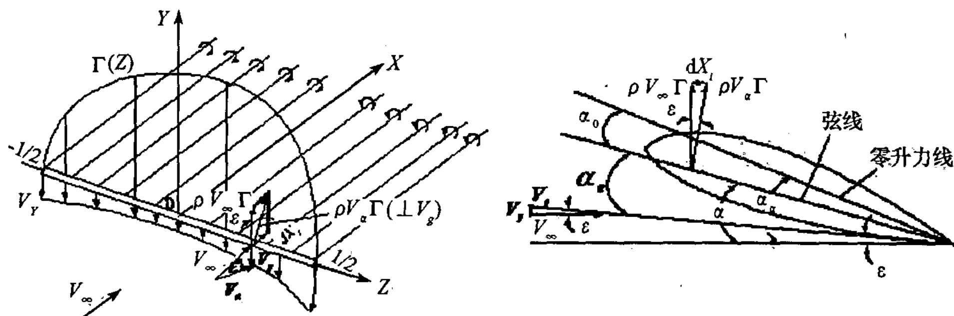


图 4.12　下洗速度模型

$$\mathrm{d}v_y(z)=\frac{\mathrm{d}\Gamma(\zeta)}{4\pi(\zeta-z)}=\frac{\gamma(\zeta)\cdot\mathrm{d}\zeta}{4\pi(\zeta-z)}$$

全部自由涡对升力线上任意点 z 的扰动速度：

$$v_y(z) = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\gamma(\zeta)}{4\pi(\zeta - z)} d\zeta$$

由于自由涡的扰动速度是向下的，称为下洗速度，规定向下为正：

$$v_\Gamma(z) = -v_y(z) = -\int_{-l/2}^{l/2} \frac{\gamma(\zeta)}{4\pi(\zeta - z)} d\zeta \tag{4.14}$$

因为有了下洗速度，流场中 z 点的速度不再是均匀来流，当地速度 $V_e(z)$ 称为有效速度：$\boldsymbol{V}_e(z) = \boldsymbol{V}_\infty + \boldsymbol{v}_\Gamma(z)$，它与自由来流速度的夹角称为下洗角 $\varepsilon(z)$，也规定向下为正；下洗角和下洗速度有如下关系：

$$\varepsilon(z) = \arctan \frac{v_\Gamma(z)}{u_\infty} \approx \frac{v_\Gamma(z)}{u_\infty} \tag{4.15}$$

流动方向的改变相当于改变了 z 点处对应翼型的迎角，当地有效迎角：

$$\alpha_e(z) = \alpha(z) - \varepsilon(z) \tag{4.16}$$

式中 $\alpha(z)$ 是 z 点当地翼型弦线相对于自由来流速度的夹角，称为几何迎角，对于无扭转的平板机翼，就是机翼迎角 $\alpha(z) = \alpha$。

由于存在下洗速度，翼剖面气动力相当于有效速度 $V_e(z)$ 流过有效迎角 $\alpha_e(z)$ 的翼型气动力，则 z 点机翼微元受到的气动力：

$$d\boldsymbol{F}(z) = \rho \boldsymbol{V}_e \times [\boldsymbol{\Gamma}(z) \cdot dz] \tag{4.17}$$

在 x 方向投影称为诱导阻力：

$$dF_x(z) = dF(z) \cdot \sin\varepsilon = \rho \cdot v_\Gamma(z) \cdot \Gamma(z) \cdot dz \tag{4.18}$$

在 y 方向投影为当地升力：

$$dF_y(z) = dF(z) \cdot \cos\varepsilon = \rho \cdot u_\infty \cdot \Gamma(z) \cdot dz \tag{4.19}$$

升力线理论假设：机翼展向 z 点位置翼剖面的气动力特性等于这点翼剖面对应翼型的气动力特性。根据这一假设条件，如果在机翼 z 点当地翼剖面对应翼型的升力线斜率为 a_0（前面已经介绍，如果没有提供所用翼型的升力线斜率，可以采用上一章薄翼理论得到的结果 $a_0 = 2\pi$），当地翼剖面升力系数：

$$C_{L(2)}(z) = a_0 \cdot [\alpha(z) - \alpha_0(z) - \varepsilon(z)] \triangleq a_0 \cdot [\alpha_a(z) - \varepsilon(z)] \tag{4.20}$$

这里 $\alpha_a(z) = \alpha(z) - \alpha_0(z)$ 为翼剖面从零升力线算起、相对于自由来流的绝对迎角，对于翼剖面采用相似翼型的无扭转机翼，沿展向绝对迎角不变：$\alpha_a(z) = \alpha_a$。

作用机翼微元 dz 气动力特性又写为：

$$dF_y(z) = C_{L(2)}(z) \cdot \frac{1}{2} \rho \cdot u_\infty^2 \cdot b(z) \cdot dz \tag{4.21}$$

式中 $b(z)$ 当地弦长，对应翼型的升力系数：

比较(4.19)和(4.21)，得出：

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \frac{1}{2} a_0 \cdot u_\infty \cdot b(z) \cdot [\alpha_a(z) - \varepsilon(z)] \\ &= \frac{1}{2} a_0 \cdot u_\infty \cdot b(z) \cdot \left[\alpha_a(z) - \frac{v_\Gamma}{u_\infty}\right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}a_0 \cdot u_\infty \cdot b(z) \cdot \left[\alpha_a(z) + \frac{1}{4\pi \cdot u_\infty}\int_{-l/2}^{l/2} \frac{\gamma(\zeta)}{(\zeta - z)}d\zeta \right] \tag{4.22}$$

这就是升力线理论的基本积分方程;因为在积分符号内含有环量 $\Gamma(z)$的微分形式 $\gamma(\zeta)$,有时又称为升力线理论的基本积分—微分方程。

对于 1/4 弦点连线为直线机翼的平面基本形状主要取决于 $b(z)$分布,确定来流迎角 $\alpha_a(z)$以后,基本积分方程中仅有一个未知数环量 $\Gamma(z)$,原则上可以求出;除了少数可以直接写出解析形式的机翼平面外,一般采用 Fourier 级数近似求解。

引入中间变量 $\zeta = -\frac{l}{2}\cos\theta$,记 $z = -\frac{l}{2}\cos\theta_1$,则有如下关系:

$$d\zeta = \frac{l}{2}\sin\theta \cdot d\theta, \quad \zeta - z = \frac{l}{2}(\cos\theta_1 - \cos\theta)$$

$$\gamma(\zeta) = \frac{d\Gamma(\zeta)}{d\zeta} = \frac{d\Gamma(\theta)}{d\theta}\frac{2}{l \cdot \sin\theta} = \Gamma'(\theta)\frac{2}{l \cdot \sin\theta}$$

升力线理论的基本积分方程变为:

$$\Gamma(\theta_1) = \frac{1}{2}a_0 \cdot u_\infty \cdot b(\theta_1) \cdot \left[\alpha_a(\theta_1) + \frac{1}{2\pi \cdot u_\infty \cdot l}\int_0^\pi \frac{\Gamma'(\theta)}{(\cos\theta_1 - \cos\theta)}d\theta \right] \tag{4.23}$$

根据理论分析和实验观测在机翼翼梢处没有压力差,环量满足:$\Gamma(0) = \Gamma(\pi)$;因此,在建立环量 $\Gamma(z)$ 的 Fourier 级数时,可以写为如下形式:

$$\Gamma(\theta_1) = 2l \cdot u_\infty \cdot \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin(n\theta_1) \tag{4.24}$$

根据机翼左右对称特性,有 $\Gamma(\theta_1) = \Gamma(\pi - \theta_1)$,即:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin(n\theta_1) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin[n(\pi - \theta_1)]$$

如果 n 为偶数,有 $\sin[n(\pi - \theta_1)] = -\sin(n\theta_1)$,因此对应的 $A_{2n} = 0$。

$$\Gamma'(\theta_1) = 2l \cdot u_\infty \cdot \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n-1} \cdot (2n - 1)\cos[(2n - 1)\theta_1]$$

利用关系式:

$$I_n = \int_0^\pi \frac{\cos(n\theta)}{(\cos\theta - \cos\theta_1)}d\theta = \pi\frac{\sin(n\theta_1)}{\sin\theta_1}$$

这样,有:

$$\frac{1}{2\pi \cdot u_\infty \cdot l}\int_0^\pi \frac{\Gamma'(\theta)}{[\cos(\theta_1) - \cos(\theta)]}d\theta = -\frac{\sum_{n=1}^{\infty} A_{2n-1} \cdot (2n - 1)\sin[(2n - 1)\theta_1]}{\sin\theta_1}$$

代入升力线理论基本积分方程:

$$2l \cdot u_\infty \cdot \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n-1} \cdot \sin[(2n - 1)\theta_1]$$

$$= \frac{1}{2}a_0 \cdot u_\infty \cdot b(\theta_1) \cdot \left[\alpha_a(\theta_1) - \frac{\sum_{n=1}^{\infty} A_{2n-1} \cdot (2n - 1)\sin[(2n - 1)\theta_1]}{\sin\theta_1} \right]$$

整理以后写为:

$$4l\sum_{n=1}^{\infty}A_{2n-1}\cdot\sin[(2n-1)\theta_1]$$
$$=a_0\cdot b(\theta_1)\cdot\left[\alpha_a(\theta_1)-\frac{1}{\sin\theta_1}\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)\cdot A_{2n-1}\cdot\sin[(2n-1)\theta_1]\right] \tag{4.25}$$

为了确定系数 A_{2n-1}，两边乘以 $\sin[(2n-1)\theta_1]$ 以后在 $[0,\pi]$ 区间积分，应用积分关系式：

$$\int_0^{\pi}\sin(n\theta)\cdot\sin(m\theta)\mathrm{d}\theta=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2} & m=n\\ 0 & m\neq n\end{cases}$$

可以写出 A_{2n-1} 表达式。

实际应用中，不可能使用环量 Fourier 级数的无限项，一般取前几项近似。如果取 i 项，则需要确定 $A_1,A_3,A_5,\cdots,A_{2i-1}$，在 $\theta_1\in(0,\pi/2)$ 范围内取 i 不相同的值，代入上式，建立 i 阶线性方程组，可以求出 i 个未知量。

例 4.1　对于展弦比 $\lambda=6$、$a_0=2\pi$、迎角 α 的无扭转矩形机翼 $b(z)=b_0$，求环量 Fourier 级数的前 3 项。

解：把已知条件代入升力线理论的级数方程(4.25)式，得到：

$$12\sum_{n=1}^{3}A_{2n-1}\cdot\sin[(2n-1)\theta_1]$$
$$=\pi\cdot\left[\alpha-\frac{1}{\sin\theta_1}\sum_{n=1}^{3}(2n-1)\cdot A_{2n-1}\cdot\sin[(2n-1)\theta_1]\right]$$

记 $A_0=\dfrac{\pi\cdot\alpha}{12}$，整理以后得：

$$A_0=A_1\cdot\left(1+\frac{\pi}{12\sin\theta_1}\right)\sin\theta_1+A_3\cdot\left(1+\frac{3\pi}{12\sin\theta_1}\right)\sin3\theta_1$$
$$+A_5\cdot\left(1+\frac{5\pi}{12\sin\theta_1}\right)\sin5\theta_1$$

取 $\theta_1=\left\{\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{6}\right\}$，代入上式得到 3 个线性方程，求得：

$$A_1=0.9160A_0,\quad A_3=0.1069A_0,\quad A_5=0.0152A_0$$

得到环量分布：

$$\Gamma(\theta_1)=\frac{u_\infty\cdot l\cdot\pi\alpha}{6}(0.9160\sin\theta_1+0.1069\sin3\theta_1+0.0152\sin5\theta_1)$$

求出环量 $\Gamma(z)$ 分布以后，代入升力公式(4.19)，沿展向积分，得到机翼升力：

$$F_y=\rho\cdot u_\infty\cdot\int_{-l/2}^{l/2}\Gamma(z)\cdot\mathrm{d}z$$
$$=\rho l^2\cdot u_\infty^2\cdot\int_0^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}A_{2n-1}\sin[(2n-1)\theta_1]\cdot\sin\theta_1\mathrm{d}\theta_1$$

积分以后发现只有第一项对机翼升力有贡献：

$$F_y=\rho l^2\cdot u_\infty^2\cdot A_1\cdot\frac{\pi}{2}$$

得到机翼升力系数：

$$C_L = \pi \cdot A_1 \cdot \frac{l^2}{S} = \pi \cdot A_1 \cdot \lambda \tag{4.26}$$

对于翼剖面采用相似翼型的无扭转机翼，沿展向绝对迎角不变：$\alpha_a(z) = \alpha_a$，在(4.25)式两边乘以 $\sin\theta_1$ 以后在$[0,\pi]$区间积分求 A_1，则有：

$$4l \cdot A_1 \cdot \frac{\pi}{2} = \left[a_0 \cdot \alpha_a \frac{2S}{l} - a_0 \cdot A_1 \frac{2S}{l}(1+\tau)\right]$$

这里 τ 是与机翼平面形状相关的一个小量：

$$\tau = \frac{l}{2A_1 \cdot S}\int_0^\pi b(\theta_1) \cdot \sum_{n=2}^{\infty}(2n-1) \cdot A_{2n-1} \cdot \sin[(2n-1)\theta_1]\mathrm{d}\theta_1 \tag{4.27}$$

解出 $A_1 = \dfrac{a_0 \cdot \alpha_a}{\pi\lambda + a_0(1+\tau)}$ 代入(4.26)式，得到：

$$C_L = \frac{a_0 \cdot \alpha_a}{1 + \dfrac{a_0}{\pi\lambda}(1+\tau)} \tag{4.28}$$

这样可以得到机翼升力线斜率：

$$C_L^\alpha = \frac{a_0}{1 + \dfrac{a_0}{\pi\lambda}(1+\tau)} \tag{4.29}$$

可以看出，由于机翼的三维效应，在翼梢的环量较小，机翼升力线斜率 C_L^α 总是小于翼型升力线斜率 a_0。

已知环量 $\Gamma(z)$ 分布，可以求出式中下洗角：

$$\varepsilon(z) \approx \frac{v_\Gamma(z)}{u_\infty} = -\frac{1}{4\pi u_\infty}\int_{-l/2}^{l/2}\frac{\gamma(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta = \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} nA_n \sin(n\theta_1)}{\sin\theta_1} \tag{4.30}$$

对于无扭转长直机翼，自由涡面产生的机翼诱导阻力：

$$\begin{aligned}F_{xi} &= \rho \cdot \int_{-l/2}^{l/2} v_\Gamma(z) \cdot \Gamma(z) \cdot \mathrm{d}z \\ &= \rho l^2 \cdot u_\infty^2 \int_0^\pi \left[\sum_{m=1}^{\infty} mA_n \sin(m\theta)\right] \cdot \left[\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\theta)\right]\mathrm{d}\theta \\ &= \rho l^2 \cdot u_\infty^2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} nA_n\end{aligned} \tag{4.31}$$

机翼诱导阻力系数：

$$C_{Di} = \pi l \cdot \sum_{n=1}^{\infty} nA_n = \pi\lambda \cdot A_1^2\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nA_n^2}{A_1^2}\right) = \frac{C_L^2}{\pi\lambda}(1+\delta) \tag{4.32}$$

这里 $\delta = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{nA_n^2}{A_1^2}$ 是与机翼平面形状相关的一个小量。

同样可以求出，以机翼参考点关于 z 轴的展向剖面翼型俯仰力矩系数：

$$C_{mz(2)}(z) = C_{mz0(2)} - \frac{C_{L(2)}(z) \cdot x_{0.25}(z)}{b(z)} \tag{4.33}$$

式中 $C_{mz0(2)}(z)$ 是翼型绕气动中心(1/4 弦点)的俯仰力矩系数,$x_{0.25}(z)$ 为机翼当地剖面 1/4 弦点离 z 轴的距离。沿展向积分,得到机翼俯仰力矩系数:

$$C_{mz}=\frac{1}{S\cdot b_A}\int_{-l/2}^{l/2}C_{mz(2)}(z)\cdot b^2(z)\cdot \mathrm{d}z \tag{4.34}$$

由于升力线理论假设翼剖面气动力作用在 1/4 弦线点上,没有考虑沿弦向的压力分布影响,因此得到的俯仰力矩系数、焦点和压心比升力面理论得到的结果精度差。

根据以上升力线理论推导过程,可以看出给定机翼平面基本形状 $b(z)$ 和来流迎角 $\alpha_a(z)$ 以后,就可以求出机翼的气动力特性。利用以上公式可以预测气动力特性外,还可以进行不同平面基本形状机翼之间的气动力换算。机翼升力线斜率总是小于对应的翼型升力线斜率,给定升力系数以后,绝对迎角为:

$$\alpha_a=\frac{C_L}{a_0}+\frac{C_L}{\pi\lambda}(1+\tau) \tag{4.35}$$

其中第一项记为 $\alpha_\infty=C_L/a_0$,它是翼型实现同样升力系数需要的绝对迎角,也是自由来流与机翼根弦的绝对迎角。根据上式,达到同样的升力系数,机翼需要比翼型更大的迎角;机翼展弦比 λ 越大,需要的迎角越小。

平面基本形状不同、翼型相同的两个长直机翼:

$$\begin{cases}\alpha_{a1}=\alpha_{\infty1}+\dfrac{C_{L1}}{\pi\lambda_1}(1+\tau_1)\\[2ex]\alpha_{a2}=\alpha_{\infty2}+\dfrac{C_{L2}}{\pi\lambda_2}(1+\tau_2)\end{cases}$$

两机翼达到同样升力系数 $C_{L2}=C_{L1}=C_L$,由于翼型相同,有 $\alpha_{\infty1}=\alpha_{\infty2}$,两个机翼的绝对迎角之间存在:

$$\alpha_{a2}=\alpha_{a1}+\frac{C_L}{\pi}\left(\frac{1+\tau_2}{\lambda_2}-\frac{1+\tau_1}{\lambda_1}\right) \tag{4.36}$$

如果已知第一个机翼的升力系数变化曲线 $C_{L1}\sim\alpha_{a1}$,根据上式可以换算得到第一个机翼的升力系数变化曲线 $C_{L2}\sim\alpha_{a2}$。

同样可以建立两机翼达到升力系数 $C_{L2}=C_{L1}=C_L$ 产生的诱导阻力系数之间的换算公式:

$$C_{Di2}=C_{Di1}\frac{1+\delta_2}{1+\delta_1}\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\approx C_{Di1}\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \tag{4.37}$$

图 4.13 中上面两图(a)和(b)是实验得到的原始数据,下面两图(c)和(d)是根据(4.36)和(4.37)换算得到 $\lambda_2=5$ 的相应曲线;由图可见重合性较好。大量实验表明对于 1/4 弦长点连线近似直线的直机翼,在展弦比 $\lambda>3$ 时升力线理论有较好的预测精度。利用以上关系可以根据已有地面风洞实验数据预测新的机翼布局,减少实验次数,提高效率。

例 4.2　无扭转矩形机翼,展弦比 $\lambda=5$,已知环量分布:

$$\Gamma(\theta_1)=2u_\infty l\alpha(0.02340\sin\theta_1+0.00268\sin3\theta_1+0.00072\sin5\theta_1+0.00001\sin7\theta_1)$$

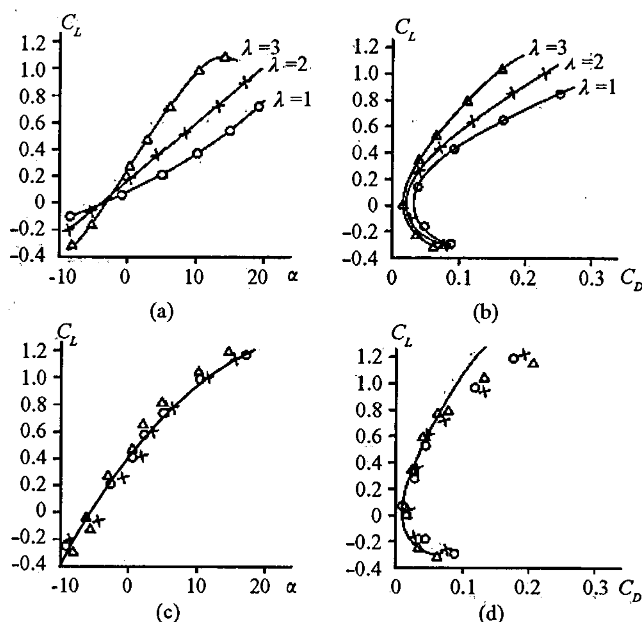


图 4.13 不同展弦比矩形机翼升力系数曲线和极曲线实验数据和归一化处理

求迎角 $\alpha=4°$时机翼的升力系数和诱导阻力系数。

解:写为环量分布标准形式,式中系数:

$$A_1=0.02340\,\frac{4\pi}{180}=0.0016328$$

$$A_3=0.00018700$$

$$A_5=0.0005024$$

$$A_7=0.0000007$$

代入得升力系数 $C_L=\pi\cdot A_1\cdot\lambda=0.06451$。诱导阻力系数 $C_{Di}=\pi\lambda\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}nA_n^2=0.00027$。

下面考虑一个特例,取:

$$\left.\begin{aligned}b(z)&=b_0\sqrt{1-\left(\frac{2z}{l}\right)^2}\\ b(\theta)&=b_0\cdot\sin\theta\end{aligned}\right\}\tag{4.38}$$

这是一个椭圆形机翼,它的长轴就是 z 轴$[-l/2, l/2]$范围,由于 1/4 弦线为直线,因此前缘对应的椭圆短轴长度 $b_0/4$,后缘对应的椭圆短轴长度$(3/4)b_0$;椭圆形机翼面积 $S=\pi l\cdot b_0/4$。代入升力线理论的基本积分方程的 Fourier 级数表达式:

$$4l\cdot A_1=a_0\cdot b_0\cdot[\alpha_a-A_1]$$

即

$$A_1=\frac{a_0\cdot\alpha_a}{\pi\lambda+a_0}$$

其余各项的系数为零。因此,椭圆形机翼的环量分布也为椭圆形的:

$$\left.\begin{aligned}\Gamma(\theta)&=\Gamma_0\cdot\sin\theta\\ \Gamma(z)&=\Gamma_0\sqrt{1-\left(\frac{2z}{l}\right)^2}\end{aligned}\right\}\tag{4.39}$$

这里 $\Gamma_0=2l\cdot u_\infty\cdot\dfrac{a_0\cdot\alpha_a}{\pi\lambda+a_0}$。环量分布如图 4.14。

代入升力线理论公式可以证明椭圆形机翼有如下特点：

(1)自由涡面诱导的下洗角和下洗速度为常数：

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon(z)&=\frac{C_L}{\pi\lambda}\\ v_\Gamma(z)&=\frac{C_L\cdot u_\infty}{\pi\lambda}\end{aligned}\right\}\tag{4.40}$$

(2)升力线斜率和诱导阻力公式中与机翼平面形状相关的小量 $\tau=0$ 和 $\delta=0$，机翼升力线斜率：

$$C_L^\alpha=\frac{a_0}{1+\dfrac{a_0}{\pi\lambda}}\tag{4.41}$$

诱导阻力系数：

$$C_{Di}=\frac{C_L^2}{\pi\lambda}\tag{4.42}$$

在翼型升力线斜率 a_0、机翼展弦比 λ 相等的情况下，椭圆形机翼比其他形状机翼的升力线斜率大，在同样迎角飞行时可以提供最大的升力；同时提供相同升力所产生的诱导阻力最小；所以把按照以上布置的椭圆形机翼称为最佳平面形状机翼。

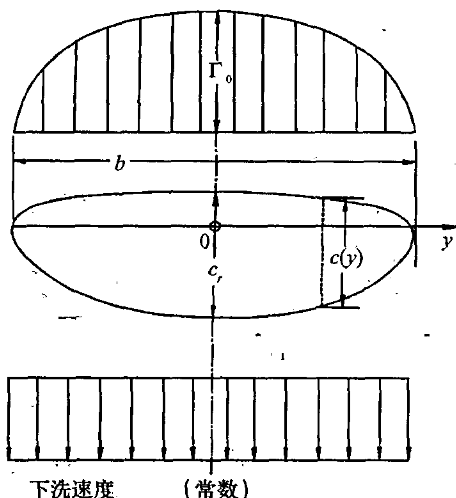


图 4.14　椭圆形机翼的环量及下洗速度分布

例 4.3　已知无扭转椭圆机翼根弦 $b_0=2\text{m}$、展长 $l=10\text{m}$，在海平面空气中以迎角 $\alpha=5°$、速度 $u_\infty=40\text{m/s}$ 飞行，假设翼型升力线斜率 $a_0=2\pi$，求升力和诱导阻力。

解：椭圆机翼面积 $S=\pi\times\frac{10}{2}\times\frac{2}{2}=15.7\text{m}^2$，展弦比 $\lambda=\frac{l^2}{S}=6.369$，动压头 $q_\infty=0.5\times 1.226\times 40^2=980.8\text{N/m}^2$。

机翼升力线斜率 $C_L^\alpha=\dfrac{a_0}{1+\dfrac{a_0}{\pi\lambda}}=4.779$。

无扭转机翼升力系数 $C_L=C_L^\alpha\cdot\alpha=0.4168$。

升力 $F_y=C_L\cdot q_\infty\cdot S=6419.06\text{N}$。

诱导阻力系数 $C_{Di}=\dfrac{C_L^2}{\pi\lambda}=0.0086$。

诱导阻力 $F_{xi}=C_{Di}\cdot q_\infty\cdot S=132.42\text{N}$。

§4.3 大展弦比直机翼的低速气动力特性

升力线理论是建立在无粘速势方程基础上的，因此不能准确给出机翼的分离失速特性，但是可以根据翼剖面当地诱导下洗速度或当地升力系数定性预测几何形状对失速的影响。

根据前面推导，当地翼剖面对应的翼型升力系数 $C_{L(2)}(z)$ 与环量 $\Gamma(z)$ 关系为：

$$C_{L(2)}(z)=\frac{2\Gamma(z)}{u_\infty\cdot b(z)} \tag{4.43}$$

假如翼型剖面形状相似、升力线斜率 a_0 相等，常见的无扭转机翼形状环量分布和当地翼剖面对应的翼型升力系数如图 4.15。

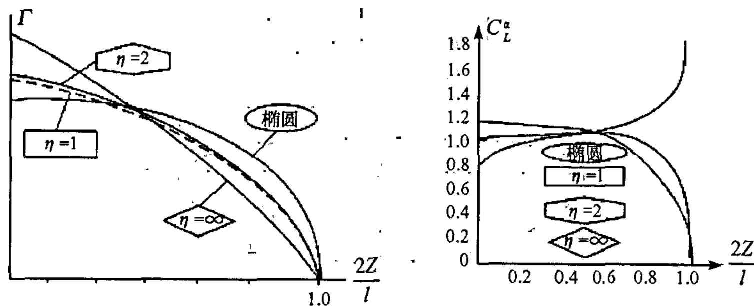


图 4.15 常见的机翼形状环量分布和当地翼剖面的对应翼型升力系数

椭圆形机翼 $C_{L(2)}(z)$ 是常数，诱导下洗速度是常数，沿展向有效迎角也是常数，随着迎角增大，各翼剖面同时达到最大升力系数，同时失速。矩形机翼 $C_{L(2)}(z)$ 在翼根处最大，诱导下洗速度沿展向从翼根向翼梢增大，有效迎角沿展向从翼根向翼梢减小，也是翼根处最大，因此随着迎角增大，翼根处的翼剖面首先达到最大升力系数，开始失速。对于根梢比较大（例如 $\eta>2$）的梯形机翼，沿展向 $C_{L(2)}(z)$ 在中间最大，因此失速发生在机翼的中间部分；随着根梢比增大，失速开始的位置向翼梢方向移动，对于 $\eta=\infty$ 的尖翼梢机

翼,在很小的迎角下,翼梢就发生失速分离。以上是升力线理论预测机翼的分离失速特性,实际观测情况如图 4.16 所示,二者较为一致;随着迎角增大,椭圆形机翼分离线基本保持直线从后缘向前缘扩展,矩形机翼分离线从翼根后缘同时向前缘和翼梢方向扩展,梯形机翼分离线从接近翼梢的后缘位置向前缘和翼根方向扩展。

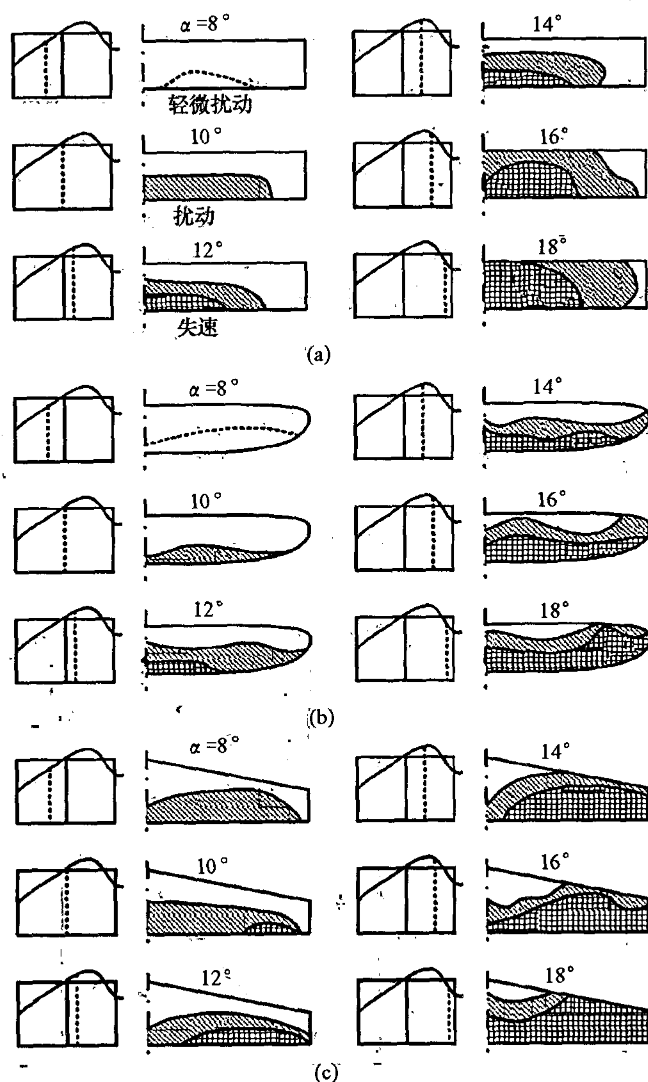


图 4.16 大展弦比直机翼的失速特性

同样的机翼失速面积,翼梢处气动力产生的、相对于轴的滚转力矩较大,从飞机横向稳定性和操纵性来看,翼根先失速对飞行有两方面好处。首先,机翼内侧剖面的分离气流打到平尾上可使飞行员感受到它所造成的扰流抖动警告而避免进入失速状态;其次,翼根刚开始失速翼梢还未失速,可使全机处于失速状态时副翼等操纵面仍有控制和操纵飞机的足够效率,以保证可从危险的螺旋中改出。因此,从气动特性看根梢比较大的梯形机翼

失速特性最差;但是,梯形机翼最接近最佳平面机翼——椭圆形机翼的气动力特性,在结构和加工方面比椭圆形机翼有优势,所以一般低速飞机还是采用梯形机翼较多。为了改善梯形机翼失速特性,保证翼梢迟于翼根失速,常采取从翼根向翼梢逐步增大的外洗的几何扭转、翼梢前缘缝翼和翼梢小翼等措施;有时也采用气动扭转从翼根向翼梢改变翼型,使翼梢处零升力迎角变小。

图 4.17 是翼剖面为 NACA2412 翼型、$\lambda=5$ 的矩形机翼根据升力线理论计算得到的极曲线和实验结果的比较,变化规律较为一致,差异随着迎角增大而增加,其机理可以分析如下:低速机翼的阻力由摩擦阻力、压差阻力和诱导阻力三部分组成,在小迎角范围内,机翼表面没有气流分离,压差阻力很小;摩擦阻力系数基本随迎角变化很小,基本为常数;在非常接近零升迎角情况下,诱导阻力系数接近零,机翼阻力的主要成分是摩擦阻力;随着迎角增大,升力系数增大,诱导阻力系数与升力系数平方成正比增大,诱导阻力上升成为阻力的主要成分,机翼阻力随迎角变化曲线与升力线理论预测结果相差一个常数;当迎角超过临界迎角以后,机翼表面气流将发生分离,压差阻力对阻力的贡献不断增大,导致升力线理论预测值逐步偏离实验结果。

为了说明升力线理论适用范围,图 4.18 给出了矩形机翼的理论预测和风洞实验数据比较,可以看出 $\lambda=5$ 时计算和实验符合很好,但是到了小展弦比情况下,从非常小的迎角开始就出现较明显的差异。

实践表明,升力线理论对于 $\lambda>3$ 的直机翼基本适用。

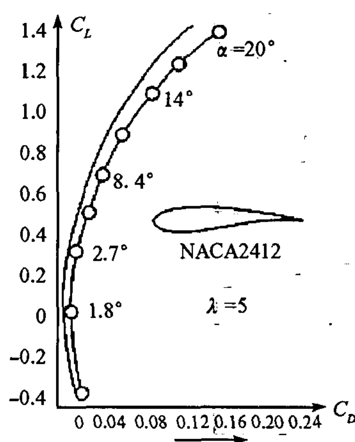


图 4.17 机翼阻力系数随迎角变化曲线

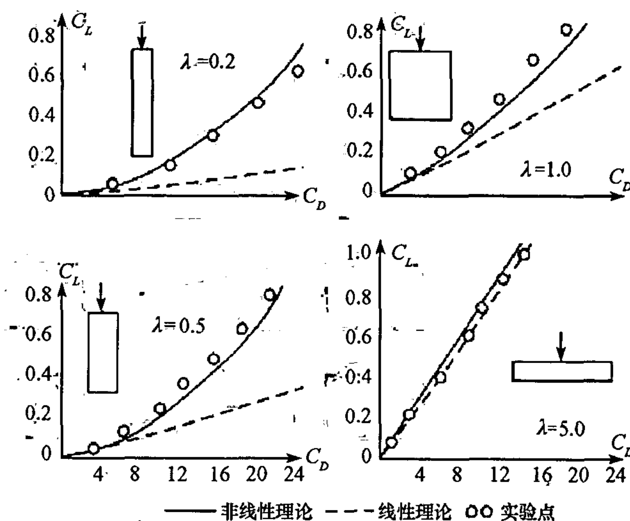


图 4.18 矩形机翼展弦比对升力系数影响

§4.4　大展弦比后掠机翼的升力线修正理论

从前面升力线理论建立过程看,不适用于后掠机翼。对于后掠翼的低速气动力特性可以采用前面介绍的升力面理论进行估算;在精度要求不是很高的情况下,也可以采用以上无限翼展斜置翼和翼型之间的关系,根据升力线理论得到的大展弦比直机翼器动力的基础上修正得到。

为了说明后掠翼的这个绕流特点,首先讨论如图4.19示意的无限翼展斜置翼的绕流问题。设无限翼展斜置机翼的后掠角(斜置角)为 χ,可将流场中速度 V 分解成垂直于前缘的法向速度 u_n 和平行于前缘的切向速度 u_t 两个分量;自由来流速度 V_∞ 分解成 $u_{\infty n}=u_\infty\cos\chi$ 和 $u_{\infty t}=u_\infty\sin\chi$。无限翼展斜置机翼沿切向物理量导数为零,自动满足物面边界条件,流线经过机翼过程中,不会改变 $u_t=u_{\infty t}$;上下翼面速度 u_t 完全相等,对机翼升力没有贡献;因此,对决定机翼升力的仅仅是法向速度 u_n。但是,尽管 u_t 是个常数,对流动也有作用,使无限翼展斜置机翼绕流不同于使无限长翼展直机翼(即翼型)的绕流。由于在流经机翼过程中,u_n 不断改变,在机翼前缘点附近 u_n 趋向零,其后不断加速,达到最大速度值以后,到后缘之前又连续减速,因此流场中合速度的 V 方向和大小也在不断改变,使得流动绕过无限翼展斜置机翼的物面流线呈"S"形。

无限翼展斜置机翼升力仅与法向速度 u_n 有关,即无限翼展斜置机翼所受的气动力等于来流以法向速度 $u_{\infty n}$ 流过该斜置机翼正置后的无限翼展直机翼(翼型)气动力。由于机翼气动力系数是以机翼的自由来流速度、来流动压和迎角定义的,所以需要把正置后对应翼型气动力系数进行转换为斜置机翼气动力系数。

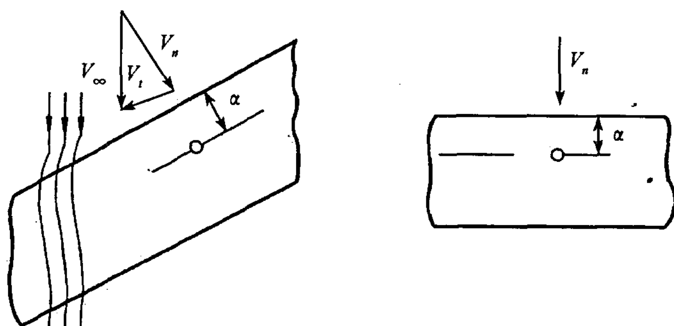


图4.19　无限翼展斜置翼流线及分析模型

根据以上分析,如果作用在无限翼展斜置机翼和对应无限长翼展直机翼(翼型)上相同点上的压力相等 $p_n=p$,根据压力系数之间关系:

$$C_p=\frac{p-p_\infty}{0.5\rho\cdot u_\infty^2}=\frac{p-p_\infty}{0.5\rho\cdot(u_{\infty n}/\cos\chi)^2}=C_{pn}\cdot\cos^2\chi \tag{4.44}$$

那么在得到翼型上任意点压力系数 C_{pn},就可以给出斜置角为 χ 无限翼展斜置机翼对应

点的压力系数 C_p。

展向单位长度无限翼展斜置机翼和对应翼型上升力系数：

$$C_l = \frac{1}{b \cdot 1}\int_0^b [C_{pl}(x) - C_{pu}(x)]\mathrm{d}x$$

$$C_{Ln} = \frac{1}{b_n \cdot 1}\int_0^{b_n} [C_{pnl}(x_n) - C_{pnu}(x_n)]\mathrm{d}x_n$$

无限翼展斜置机翼和对应翼型之间沿弦向坐标关系 $x = x_n/\cos\chi$，即翼型上距前缘点 x_n 在斜置机翼距前缘点就是 x，压力系数 $C_{pn}(x_n)$ 和 $C_p(x)$ 之间关系如上，对 C_{Ln} 积分变量进行变换 $x = x_n \cdot b/b_n$，考虑 $b = b_n/\cos\chi$，所以有：

$$C_L = C_{Ln} \cdot \cos^2\chi \tag{4.45}$$

对于展向单位长度无限翼展斜置机翼和对应翼型上的阻力系数，在建立关系式时要考虑斜置机翼的阻力是对应翼型上的阻力在流向的投影：

$$C_D = C_{Dn} \cdot \cos^3\chi \tag{4.46}$$

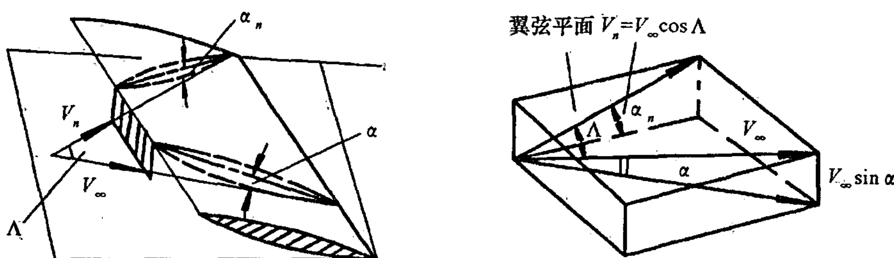


图 4.20　无限翼展斜置翼迎角与对应的正置翼之间迎角关系

如图 4.20 所示，无限翼展斜置机翼迎角和对应翼型迎角之间的关系：

$$\alpha_n = \sin\alpha_n = \frac{u_\infty \sin\alpha}{u_{\infty n}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\chi} \approx \frac{\alpha}{\cos\chi} \tag{4.47}$$

无限翼展斜置机翼升力线斜率和对应翼型升力线斜率之间的关系：

$$C_L^\alpha = \frac{\mathrm{d}C_L}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{\mathrm{d}[C_{Ln} \cdot \cos^2\chi]}{\mathrm{d}[\alpha_n \cdot \cos\chi]} = C_{Ln}^\alpha \cdot \cos\chi \tag{4.48}$$

在以上无限翼展斜置机翼的基础上讨论后掠机翼。如图 4.21 所示，后掠机翼可以认为由两个对称的有限长斜置机翼组成，但是，由于后掠翼有翼根和翼梢的存在，这将使后掠翼的气动特性和无限翼展斜置翼有所不同，会引起“翼根效应”和“翼梢效应”。从图中可以看出，后掠机翼半翼展的中间部分的绕流图画与无限翼展斜置机翼十分接近，展向速度接近 $u_{\infty t} = u_\infty \sin\chi$，机翼的物面“S”形流线。后掠翼对称剖面内平行于前缘的展向速度 $u_t = 0$，在翼根上表面的前段，流线偏离对称面，流管扩张变粗，流速减慢，压强升高（吸力变小）；而在后段，流线向内偏斜，流管收缩变细，流速加快，压强降低（吸力增大）。翼梢部分情况正好相反，在翼剖面前段吸力变大，后段吸力变小。在翼根、半翼展中间和翼梢处沿弦向的压力系数分布规律如图 4.21 所示。

后掠机翼的“翼根效应”与“翼梢效应”引起翼弦的压强分布发生变化，这种变化在机

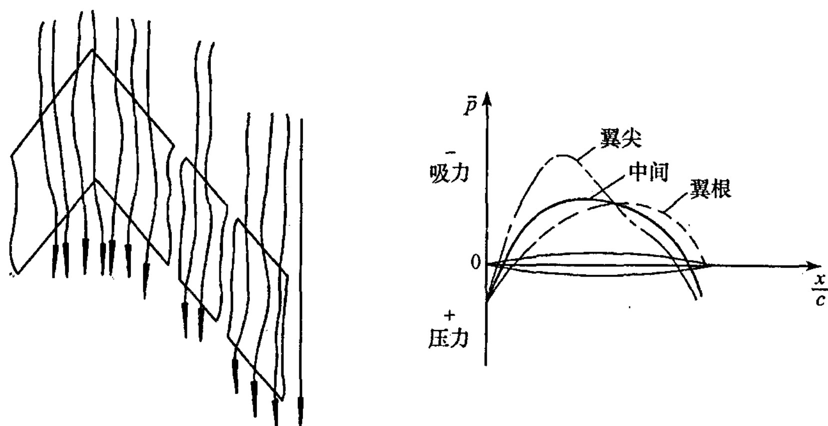


图 4.21　后掠翼流动图画和翼根效应与翼梢效应

翼上表面前段较为明显，而且上表面前段对升力贡献较大，所以“翼根效应”使翼根部分的升力系数减少，而“翼梢效应”使翼梢部分的升力系数增大。因此，后掠机翼的剖面升力系数沿展向的分布如图 4.22 所示。可以看出后掠角使翼剖面升力系数 $C_{L(2)}(z)$最大值向翼梢方向移动，这是由于“翼根效应” 在翼根附近存在正的展向压强梯度，导致流体从翼根向翼梢方向流动，使翼梢附近附面层较大；同时“翼梢效应” 在翼梢附近存在负的展向压强梯度，因此后掠机翼更易于在翼梢发生分离失速。后掠角越大，分离失速迎角越小。由于“翼根效应”的正压强梯度，翼梢分离以后，分离区向翼根发展速度较慢，失速引起升力变化比长直机翼平缓；但是，两侧翼梢分离不对称使飞机发生滚转抖动，因此失速迎角称为抖动迎角，其相应的升力系数称为抖动升力系数。

后掠翼翼梢过早的失速使得最大升力系数和临界迎角比相同展弦比直机翼的升力系数小，图 4.23 为后掠翼与相同展弦比直机翼的升力系数曲线的比较，由图看出，最大升力系数减小约 20%；临界迎角减小约 3°。需进一步指出的是，后掠翼在临界迎角附近升力变化较直机翼缓和，这是由于后掠翼翼梢失速后，翼根部分尚未失速。

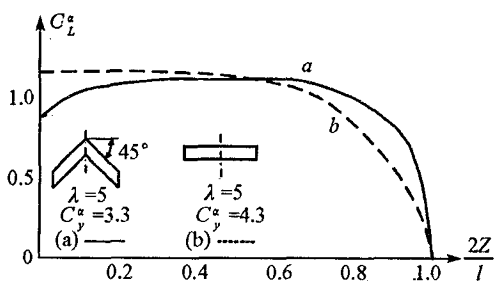


图 4.22　剖面升力系数沿展向分布比较

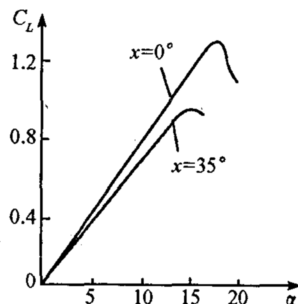


图 4.23　相同展弦比升力系数比较

由于后掠机翼存在“翼根效应”和“翼梢效应”，所以后掠角的影响不能简单的采用(4.48)式把直机翼升力线斜率中翼型的升力线斜率 a_0 替换为无限翼展斜置机翼升力线

斜率 $a_0 \cdot \cos\chi$ 得到,应用中采用如下经验修正得到后掠机翼升力线斜率:

$$C_L^\alpha = \frac{a_0 \cdot \cos\chi_e}{1 + K \cdot a_0 \cdot \cos\chi_e (1+\tau)} \tag{4.49}$$

这里 χ_e 称为有效后掠角:

$$\tan\chi_e = \tan\chi_{0.25} - \frac{\chi_{0.25}}{45\lambda\left(1+\dfrac{1}{\eta}\right)} \tag{4.50}$$

式中 K 称为展弦比 λ 修正因子, τ 称为根梢比, η 为修正因子,查表求出,参见图 4.24。

后掠机翼的诱导阻力特性依然可以按照长直机翼公式:

$$C_{Di} = \frac{C_L^2}{\pi\lambda}(1+\delta)$$

通过升力特性估算,但是其中 δ 参数不再根据升力线理论确定,而是称为修正因子,查表得到。

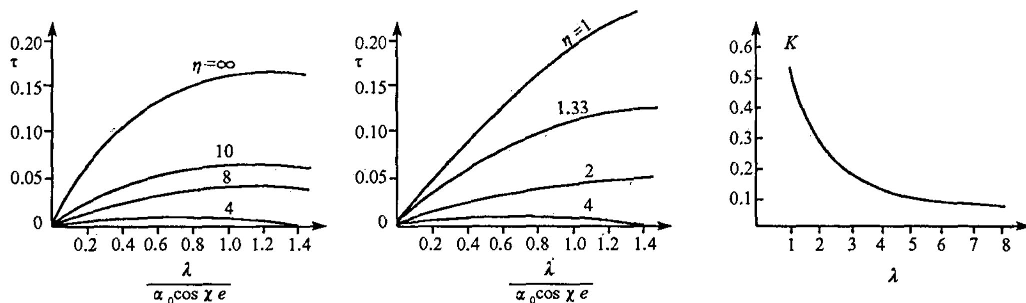


图 4.24　后掠机翼升力线斜率经验公式的修正因子

实验表明,在迎角 $\alpha \leqslant 5°$ 情况下,升力线理论预测得到机翼压心位置与实验数据符合较好;当迎角再增大时,实验压心位置比预测值靠后;当 $\alpha > 20°$ 以后出现大迎角的非线性特征,曲线影响因素多、变化规律较为复杂,在 $5° < \alpha \leqslant 20°$ 范围内工程上可以近似采用如下修正:

$$\bar{X}_P = (\bar{X}_P)_{\alpha=5°} + \frac{\alpha-5}{15}(\Delta\bar{X}_P)_{\alpha=20°} \tag{4.51}$$

式中 $(\Delta\bar{X}_P)_{\alpha=20°}$ 为 $\alpha = 20°$ 时相对后移量,根据实验数据整理给出。

例 4.4　无扭转等弦长后掠机翼,展弦比 $\lambda = 5$,翼型升力线斜率 $a_0 = 2\pi$,各剖面 1/4 弦线点连线的后掠角 $\chi_{0.25} = 45°$,求低速流动迎角 $\alpha = 5.0°$ 时的升力系数。

解:根梢比 $\eta = 1$,展弦比 $\lambda = 5$,代入公式:

$$\tan\chi_e = 1 - \frac{45}{45 \times 5 \times 2} = 0.9$$

得到有效后掠角: $\chi_e \approx 42°$;推出修正因子图表中坐标:

$$\frac{\lambda}{a_0 \cos\chi_e} = \frac{5}{2\pi \times 0.743} = 1.07$$

查表知修正因子 $K = 0.08$ 和 $\tau = 0.17$,因此,有:

$$C_L^\alpha=\frac{a_0\cdot\cos\chi_e}{1+K\cdot a_0\cdot\cos\chi_e(1+\tau)}=\frac{2\pi\times0.743}{1+0.08\times2\pi\times0.743\times1.17}=3.25$$

得到迎角 $\alpha=5.0°$时的升力系数：

$$C_L=C_L^\alpha\cdot\alpha=3.25\frac{\pi}{36}=0.283$$

§4.5　小展弦比三角翼的低速气动力预测方法介绍

超声速飞行器，尤其是导弹，经常采用前缘后掠角很大的小展弦比三角翼布局，由于大部分飞行器要经历低速阶段才能达到高速，因此分析小展弦比三角翼低速气动力性能也很有必要。

三角翼是后掠翼的特例，下翼面压强较高的气流通过翻向上翼面，产生侧向涡，导致翼梢附近翼面存在横流速度，会使三角翼的上翼面流线像后掠翼一样呈“S”形，因而在三角翼上也有翼根效应和翼梢效应。在大展弦比情况下，三角翼的侧向涡的影响范围仅仅是翼梢的小部分，因此按照前面介绍的升力面理论或升力线理论可以得到与实验较为符合的预测结果；对于小展弦比机翼，如图4.25示意，在很小的迎角下就发生从顶点开始的流动分离，形成前缘脱体涡；脱体涡的强度和位置与机翼的迎角相关，当迎角较小时，涡卷靠近前缘，随着迎角增大，涡卷变粗增强，涡心逐渐向翼根移动，当迎角增大到一定程度时，机翼大部分处于涡卷的控制之下；从前缘卷起的涡面的强度沿流向是变化的，在迎角增大到一定程度，还会出现二次分离现象，这时前面介绍的、基于无粘假设的线化理论不再适用。

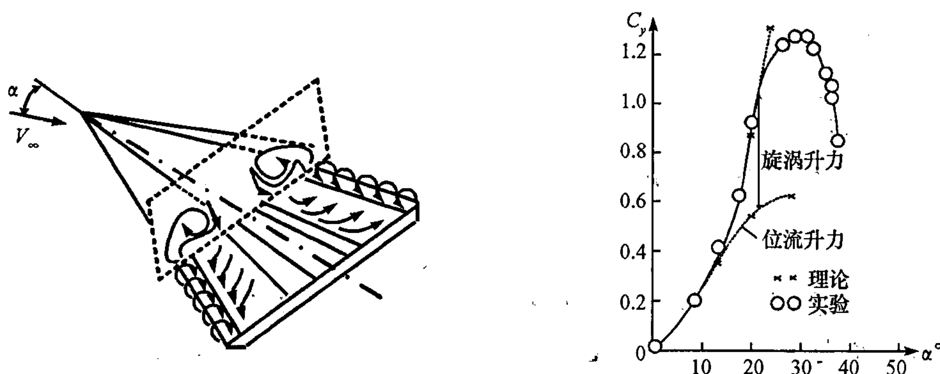


图4.25　小展弦三角翼流动示意图和升力变化曲线

对于脱体涡导致升力增加的流动机理进行简单分析。如图4.26示意，气流流过具有正迎角的三角翼，前缘脱体涡在其内侧诱起气流下洗，在外侧诱起气流上洗，下洗区的局部迎角减小，升力减小；上洗区的局部迎角增大，升力增大，这种现象称为法洗效应；由于上洗区的翼面面积较小，所以下洗区所造成的升力损失往往大于上洗区的升力增量，即法洗效应是使三角翼升力减小的。脱体涡在翼面上所诱起的切向速度分布，其方向是由翼

根指向翼梢，其大小与距涡心的距离有关，离涡心越近，切洗速度越大；反之，则越小。切洗速度使流经机翼表面的主流速度偏斜并增大致使翼面升力增大，这种现象称为切洗效应。

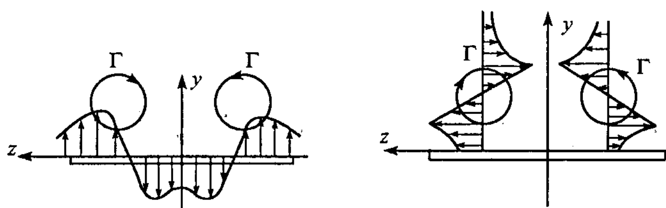


图 4.26　脱体涡的切洗效应和法洗效应

与大展弦比机翼相比，在小迎角下，翼根效应和法洗效应使根部剖面的有效迎角减小，三角翼的升力系数较小。随着迎角增大，脱体涡变粗增强，且涡心逐步向翼根移动，由于脱体涡的切洗效应，使机翼上表面产生了附加的吸力，故使升力系数非线性地增大；当迎角增大到一定程度以后，由于脱体涡在翼面上"破碎"，切洗效应显著下降，附加吸力减小，故使升力线斜率逐渐减小，整个升力曲线呈"S"形非线性变化。由于横向流动的均压作用使翼面的逆压梯度减小，又因脱体涡控制了相当大部分翼面，不断地给附面层输入能量，所以小展弦比三角翼很难出现失速。只有当迎角很大，脱体涡的破碎点移至机翼前部时，才会出现分离失速。

由于升力系数随迎角的变化规律呈现出明显的非线性特征；因此，前面介绍的升力面理论也难以得到较为精确的小展弦三角翼气动力特性预测结果。对平板翼型从理论上分析存在"前缘吸力"这一推论，受此分析方法启发，对于尖前缘、小展弦、平板三角翼，Polhamas 于 1966 年提出如下所谓的"前缘吸力比拟"估算模型，可以得到较好的预测精度。从下面介绍中可以发现，"前缘吸力比拟"估算模型建模时没有考虑粘性引起前缘脱体涡影响，采用的假设显得较为牵强附会。

假设平板三角翼产生环量为 Γ，则机翼法向力：$R_n = \rho(u_\infty \cdot \cos\alpha) \cdot \Gamma$，由于环量是速度 $u_\infty \cdot \sin\alpha$ 产生的，因此 $\Gamma \propto u_\infty \cdot \sin\alpha$；三角翼法向力系数可以写为：

$$C_N = \frac{R_n}{q_\infty \cdot S} = K_p \sin\alpha \cdot \cos\alpha \tag{4.52}$$

在小迎角范围内，$C_N = C_L^\alpha \cdot \alpha \approx K_p \cdot \alpha$，因此 K_p 就是升力线斜率 $K_p \approx C_L^\alpha$；从前面推导可以看出 K_p 是一个仅仅与平面几何形状有关的量，不随迎角变化，可以根据线化理论求出。

前面章节已经介绍，对于无厚度平板翼型，在势流理论假设条件下不存在阻力，为了克服法向力在流向的分量，推论存在前缘吸力，吸力大小为 $C'_L \cdot \sin\alpha$。尖前缘平板三角翼法向力在流向的分量不一定正好是诱导阻力，二者之间的差异就是前缘吸力。如图 4.27 示意，前缘吸力在流向的分量满足：

$$C_T = C_N \cdot \sin\alpha - C_{Di} = C_N \cdot \sin\alpha \left(1 - \frac{C_{Di}}{C_N \cdot \sin\alpha}\right) \tag{4.53}$$

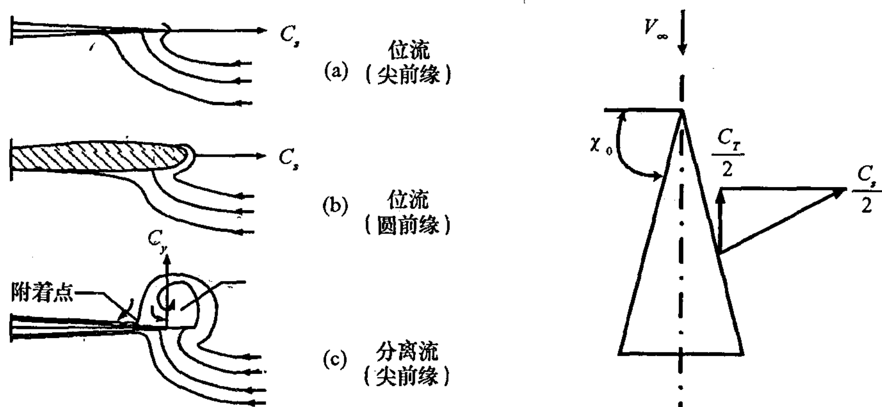


图 4.27　“前缘吸力比拟”估算模型示意图

可以根据线化理论，在小迎角范围内 $C_N \approx C_L$，$\sin\alpha \approx \alpha = C_L / C_L^\alpha \approx C_L / K_p$，参数 $K_i = C_{Di} / C_L^2$ 是一个仅仅与展弦比和机翼平面几何形状有关的量，上式写为：

$$C_T = C_N \cdot \sin\alpha (1 - K_p \cdot K_i) = K_p \cdot (1 - K_p \cdot K_i) \cdot \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha \tag{4.54}$$

已知前缘后掠角，记 $K_v = K_p \cdot (1 - K_p \cdot K_i) / \cos\chi_0$，总的前缘吸力系数：

$$C_s = \frac{C_T}{\cos}\chi_0 = K_v \cdot \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha \tag{4.55}$$

以上是在没有发生分离，尖前缘速度无穷大的情况下，理论上推导出的结论。由于前缘分离涡，改变了前缘吸力的方向，从向前拉变为与三角翼面垂直的法向；或者分离涡在上翼面的前缘产生负压，引起升力的增量在数量上等于前缘吸力。这样，尖前缘平板三角翼的升力系数：

$$C_L = C_{Lp} + C_{Lv} = C_N \cdot \cos\alpha + C_s \tag{4.56}$$

应用中根据在小迎角范围内线化理论计算出参数 K_p 和 K_v，如图 4.28，从推导过程可以看出，这两个参数都仅仅与平面几何形状有关，假设两个参数在大迎角范围内依然可用，按照以上公式可以算出尖前缘平板三角翼的升力系数。

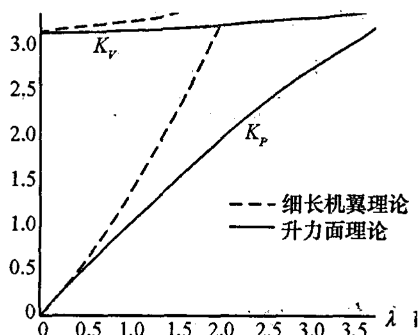


图 4.28　线化理论计算得出的三角翼修正参数

实践表明，对于前缘分离涡从顶点开始、迎角还没有增到大使分离涡沿流向失稳的平

板三角翼,有较好的预测精度,"前缘吸力比拟"估算结果与实验数据的比较如图 4.29。

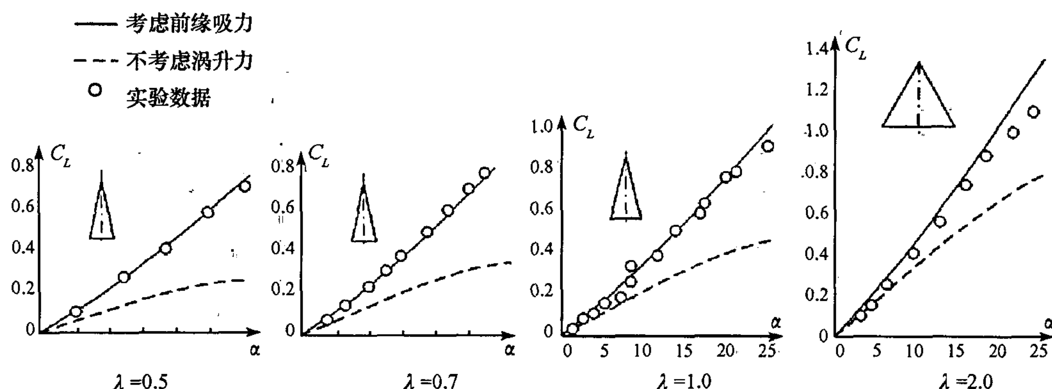


图 4.29 "前缘吸力比拟"估算结果与实验数据的比较

例 4.5 已知三角翼展弦比:$\lambda = 1.0$,利用以上介绍的"前缘吸力比拟"估算迎角 $\alpha = 5°$时升力系数。

解:通过图 4.28 表计算出展弦比:$\lambda = 1.0$ 对应的参数

$$K_p = 1.27 \text{ 和 } K_v = 3.4$$

根据 "前缘吸力比拟"(4.56)式,估算尖前缘平板三角翼的升力系数:

$$C_L = K_p \cdot \alpha + K_v \cdot \sin^2\alpha\cos\alpha = 0.315$$

本章小结

理论推测实验观,机翼下游涡旋转;
附着自由两涡面,基元边条方程建;
升力面方程作指导,布置马蹄涡来等效。
长直机翼再简化,下洗翼型相结合;
升力线方程级数解,升力线斜率极曲线;
失速特性可预测,小展弦比不适合。
后掠根梢效应异,斜置翼型建关系;
速势凑合三角翼,前缘吸力涡转移。

习 题

4-1 推导体轴系下升力面积分方程。

4-2 推导涡格法第 j 个马蹄涡对第 i 个控制点诱导速度 v_j 表达式中系数$(k_v)_{i,j}$。

4-3 证明:展长 L 的椭圆型薄平板机翼产生的升力可以由展长 $L' = \pi L/4$、环量强度为 Γ_0(椭圆形机翼的根部环量强度)的马蹄形涡所代替;如果以迎角 α、速度 u_∞ 飞行,

试计算对称面内($z=0$)离附着涡 x 处在马蹄涡所在平面上的尾翼上的下洗角 ε 对迎角 α 的导数。

4-4　证明:具有椭圆型环量分布的无扭转大展弦比直机翼平面形状亦为椭圆型。为什么这种平面形状要由二个半椭圆组成。

4-5　有一低速薄板直机翼,其环量的展向分布规律如下:

$$\Gamma(z)=\Gamma_0\left[1-\frac{z^2}{\left(\frac{L}{2}\right)^2}\right]^{\frac{3}{2}}$$

机翼根部剖面处的环量强度 Γ_0 和机翼展长 L 为已知参数,计算 1/4 弦长上展向位置 $z=L/4$ 处和翼梢处(即 $Z=\pm L/2$)的诱导下洗速度。

4-6　具有最小诱导阻力平面形状的低速机翼展弦比 $\lambda=7.63$,绘出理论极曲线(不计粘性阻力的情况下,即为升力系数随诱导阻力系数变化的曲线)。

4-7　有一无扭转的椭圆型薄机翼以 $u_\infty=45\text{m/s}$ 的速度在海平面空气中飞行。已知机翼展长 $L=10\text{m}$,展弦比 $\lambda=5$,机翼载荷(即机翼所负的重量与机翼面积之比)为 1000N/m^2,翼剖面的升力线斜率 $a_0=5.71$,试计算:

(1)机翼的诱导下洗角 ε、有效迎角 α_e 和绝对迎角 α_a;

(2)机翼的升力系数 C_L 和诱导阻力系数 C_{xi};

(3)为克服机翼的诱导阻力所需的功率。

4-8　矩形机翼的展弦比 $\lambda=a_0$,翼剖面的升力线斜率 a_0,翼根剖面绝对攻角为 α_a,翼梢剖面的绝对攻角为 $\alpha_a+\psi_0$;ψ_0 为翼梢剖面的扭转角,任一剖面的扭转角为 $\psi(z)=\psi_0\cdot 2z/L$,试写出求解系数 $A1$、$A3$、$A5$、$A7$ 的联立方程。

4-9　对于左、右流动反对称的机翼

(1)证明环量分布的傅里叶级数为:

$$\Gamma(\theta)=2LV_\infty\sum_{n=0}^{\infty}B_{2n}\sin 2n\theta,z=-\frac{L}{2}\cos\theta$$

(2)问诱导阻力是否为零?给出诱导阻力公式并说明之。

4-10　试证明一般无扭转直机翼的诱导下洗角为:$\varepsilon(z)=\frac{C_L}{\pi\lambda}(1+k)$,并求出与展向位置有关的 k 值的计算式,在什么情况下,$k=0$?

4-11　有一无扭的矩形机翼,展弦比 $\lambda=5$,展向环量分布为:

$$\Gamma(z)=2LV_\infty\alpha[0.02340\sin\theta+0.00268\sin 3\theta+0.00072\sin 5\theta+0.00010\sin 7\theta]$$

试计算迎角 $\alpha=10°$时机翼的 C_L 和 C_{xi},并将算得的结果与该机翼的等效椭圆形机翼(其总升力与原机翼相等)产生的 C_{xi} 作比较,简要说明为什么椭圆形机翼的诱导阻力最小。

4-12　已知该翼型在迎角 $\alpha=4°$时升力系数 $C_L=1.0$,试计算具有相同翼型但展弦比 $\lambda=7.5$ 的矩形翼产生升力系数 $C_L=1.0$ 时相应迎角 α 值;如展弦比 $\lambda=6$ 时相应于的迎角 α 又有多大?

4-13　有一架飞机重量 $G=26680.0\text{N}$,以 $u_\infty=160.9\text{km/h}$ 的速度在海平面上作等速

直线运动。机翼平面形状近似为椭圆形，无扭转，翼剖面为 NACA23012 翼型，机翼面积为 $S=15.58\mathrm{m}^2$，展弦比 $\lambda=10$。现知使用相同剖面的机翼在 $\lambda=6$ 和升力系数 $C_L=1.17$ 时的迎角 $\alpha=14.6$。试计算原机翼的迎角 α 和诱导阻力系数 C_{xi}。

4-14　证明：无扭转机翼的 C_L 与绝对迎角 α 成正比。

4-15　有一椭圆型平面形状的低速机翼，试证明该机翼的升力线斜率 C_L^α 与无限翼展机翼升力线斜率 a_0 之比为 $\frac{\lambda}{\lambda+2}$，画出低速椭圆型机翼的 C_L^α 与展弦比 λ 的关系曲线，并说明展弦比是如何影响椭圆形机翼的 C_L^α 的？

4-16　有一无限长斜置翼，后掠角 $\chi=30°$。在海平面以 $u_\infty=30\mathrm{m/s}$ 速度作直线飞行，迎角 $\alpha=6°$。试计算该机翼的升力线斜率 C_L^α 和单位展长的升力。并与上述情况下飞行具有同样翼型（即垂直于前缘的翼型相同）的无限长正置翼的 C_L^α 和单位展长的升力进行比较，由此可得到什么结论。

4-17　有一无限长斜置翼，后掠角 $\chi=30°$。在海平面以 $V_\infty=30\mathrm{m/s}$ 速度作直线飞行，迎角 $\alpha=6°$。试计算该机翼的升力线斜率 C_L^α 和单位展长的升力。并与上述情况下飞行具有同样翼型（即垂直于前缘的翼型相同）的无限长正置翼的 C_L^α 和单位展长的升力进行比较，由此可得到什么结论。

4-18　有一等弦长的低速后掠机翼，展弦比 $\lambda=5$，后掠角 $\chi=45°$，翼剖面无弯度，现以 $\alpha=5°$ 的迎角做低速飞行。试估算该机翼的升力系数和诱导阻力系数，并与相同展弦比的矩形翼的估算结果作比较。

4-19　已知三角翼展弦比：$\lambda=1.5$，利用“前缘吸力比拟”估算迎角 $\alpha=5°$ 时升力系数。

4-20　试分别根据升力面理论、简化升力面理论和升力线理论，画出低速机翼的理论绕流图画，与实际绕流图画相比，各作了哪些主要简化？这三个理论的气动模型的适用范围是什么？

第五章　亚声速流动中机翼气动力预测方法

流体压缩性对飞行器气动力有重要影响。图 5.1 是翼型在不可压流与亚声速流中压力分布和升力曲线比较，不可压缩气流在减速过程中，其密度不变；而可压缩气流在减速过程中，密度却不断增大，即单位体积内的空气质量增多；因而沿气流方向，可压缩气流通过单位横截面积的动量比不可压流的大；所以，可压缩气流流至驻点，速度减小到零时，压力升高的更多一些。在不可压缩气流中，翼型表面的压力系数分布仅取决于迎角和翼型，而与来流速度无关，其压力系数分布如图 5.1 中虚线所示；但在亚音速可压缩气流中，气流过翼型表面，在负压区（吸力区），流速增加，密度减小，为保持流量不变，流速有额外增加，导致压力有额外降低，即吸力有额外增加；同理，在正压区，流速减慢，密度增大，压力有额外升高；因此，由于压缩性的影响，在亚音速气流中，翼型表面有"吸处更吸，压处更压"的特点，其压力系数分布如图 5.1 中实线所示。总之，亚音速时压缩性影响使翼型上下表面压差变大，升力系数增加；且自由来流马赫数越大，压缩性影响越明显。

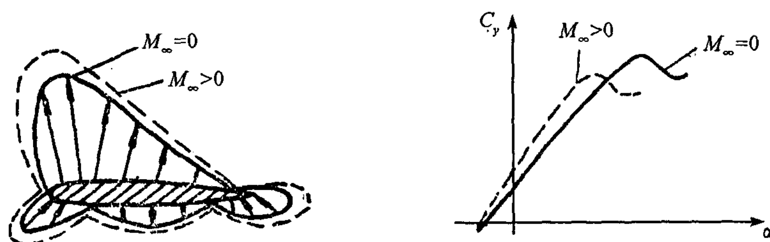


图 5.1　翼型在不可压流与亚声速流中压力分布和升力曲线比较

流场中气流密度变化用无量纲参数马赫数表征，根据等熵流动关系式：

$$\frac{\rho}{\rho_0}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{-1}{\gamma-1}}=1-\frac{1}{2}M^2+\frac{\gamma}{8}M^4+\cdots$$

如果马赫数较大，那么流体压缩性影响不容忽视；如果流动速度与声速相比，即马赫数很小，气流密度相对变化可以忽略不计，认为流体是不可压缩的。例如，流场中 $M=0.3$，这时气流密度相对变化率：$\frac{\Delta\rho}{\rho}\sim\frac{1}{2}M^2\sim5\%$，也是比较小的。

流场中每一点马赫数是变化的，一般采用自由来流马赫数来划分，应用中飞行马赫数 $M_\infty>0.3$ 要考虑流体压缩性，习惯上把 $0.3<M_\infty<0.8$ 的流动称为亚声速流，在 $0.8<M_\infty<1.2$ 范围的流动称为跨声速流，把 $1.2<M_\infty<5.0$ 的流动称为超声速流，$M_\infty>5.0$

以后称为高超声速流。

马赫数还体现了气体的动能和内能的相对大小：

$$\frac{0.5u^2}{C_v \cdot T} = \frac{\gamma(\gamma-1)}{2}M^2$$

马赫数很小，气体动能相对内能很小，速度变化不会引起温度明显变化，近似认为内能保持不变，因此在不可压缩流体研究中不考虑能量方程以及热力学关系式。但是，随着马赫数增大，速度与温度(声速)、压力、密度等显著相关。

§5.1 可压缩流动的线化速度势理论

从前面不可压流动相关理论介绍知，速度势满足 Laplace 方程，为解决远场边界的有效叠加问题，引入扰动速度势概念，认为流场是由无穷远没有扰动的流动和物体存在引起的扰动速度势构成的：$\Phi = \varphi + \Phi_\infty$，扰动速度势也满足 Laplace 方程。但是在可压流动中，速度势是非线性方程，扰动速度势不再满足 Laplace 方程。

第一章中给出无粘、定常、等熵无旋条件下，风轴系速度势方程：

$$(a^2-u^2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+(a^2-v^2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+(a^2-w^2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} -2uv\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}-2vw\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z}-2uw\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z}=0 \tag{5.1}$$

自由来流速度势：$\Phi_\infty = u_\infty x$，代入上式，得到扰动速度势方程：

$$(a^2-u^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+(a^2-v^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+(a^2-w^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} -2uv\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}-2vw\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}-2uw\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}=0 \tag{5.2}$$

无粘等熵流场的当地流体声速与自由来流之间，满足：

$$\frac{1}{\gamma-1}a^2+\frac{1}{2}|V|^2=\frac{1}{\gamma-1}a_\infty^2+\frac{1}{2}u_\infty^2$$

根据 $V = v' + V_\infty = (u, v, w) = (u_\infty + v_x, v_y, v_z)$，得到：

$$a^2 = a_\infty^2 - \frac{\gamma-1}{2}(2u_\infty v_x + v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

代入上式，等式两侧除以 a_∞^2，得：

$$\begin{aligned}(1-M_\infty^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} &= M_\infty^2\left[(\gamma+1)\frac{v_x}{u_\infty}+\frac{\gamma+1}{2}\frac{v_x^2}{u_\infty^2}+\frac{\gamma-1}{2}\left(\frac{v_y^2}{u_\infty^2}+\frac{v_z^2}{u_\infty^2}\right)\right]\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\\ &= M_\infty^2\left[(\gamma-1)\frac{v_x}{u_\infty}+\frac{\gamma+1}{2}\frac{v_y^2}{u_\infty^2}+\frac{\gamma-1}{2}\left(\frac{v_x^2}{u_\infty^2}+\frac{v_z^2}{u_\infty^2}\right)\right]\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= M_\infty^2\left[(\gamma-1)\frac{v_x}{u_\infty}+\frac{\gamma+1}{2}\frac{v_z^2}{u_\infty^2}+\frac{\gamma-1}{2}\left(\frac{v_x^2}{u_\infty^2}+\frac{v_y^2}{u_\infty^2}\right)\right]\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\\
&\quad+2M_\infty^2\left(1+\frac{v_x}{u_\infty}\right)\frac{v_y}{u_\infty}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+2M_\infty^2\left(1+\frac{v_x}{u_\infty}\right)\frac{v_z}{u_\infty}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}\\
&\quad+2M_\infty^2\frac{v_y}{u_\infty}\frac{v_z}{u_\infty}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

采用小扰动假设$|v_x|,|v_y|,|v_z|\ll u_\infty$，略去上式中的二阶小量，得：

$$
\begin{aligned}
&(1-M_\infty^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\\
&= M_\infty^2(\gamma+1)\frac{v_x}{u_\infty}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+M_\infty^2(\gamma-1)\frac{v_x}{u_\infty}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right]\\
&\quad+2M_\infty^2\frac{v_y}{u_\infty}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+2M_\infty^2\frac{v_z}{u_\infty}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

根据量级分析，如果$|1-M_\infty^2|=O(1)$，即飞行马赫数不在跨声速范围，略去上式中一阶小量，得到小扰动速度势的线化方程：

$$(1-M_\infty^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0 \tag{5.5}$$

引入符号$\beta=\sqrt{1-M_\infty^2}$（亚声速）和$B=\sqrt{M_\infty^2-1}$（超声速），进一步区分为亚声速小扰动速度势的线化方程：

$$\beta^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0 \tag{5.6}$$

和超声速小扰动速度势的线化方程：

$$B^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0 \tag{5.7}$$

如果飞行马赫数在跨声速范围，根据正激波前后熵增关系：

$$\Delta s=C_v\cdot\ln\left[\frac{\left(1+\frac{2\gamma}{\gamma+1}\varepsilon\right)\cdot\left(1+\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\varepsilon\right)^\gamma}{(1+\varepsilon)^\gamma}\right]\approx C_v\cdot\frac{2\gamma}{\gamma+1}\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\frac{\varepsilon^3}{3} \tag{5.8}$$

这里$\varepsilon=|1-M_\infty^2|$在跨声速是个小量，认为熵增可以忽略，流动还是近似看作均熵的。在表达流场中熵变化和涡变化关系的 Crocco 方程，在流场各处总焓相等的条件下，如果流动是均熵的，那么流动也是无旋的。在无旋条件下存在速度势，在小扰动假设条件下$|v_x|$，$|v_y|,|v_z|\ll u_\infty$，小扰动速度势满足以上方程(5.4)式，对它进行量级分析，可以看出：

$$(1-M_\infty^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\sim\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2},\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) \tag{5.9}$$

由于$|1-M_\infty^2|$是个小量，因此推断出流向速度梯度比其他两个方向速度梯度大一个量级，略去方程式中高阶小量，得到跨声速流动小扰动速度势方程：

$$(1-M_\infty^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=M_\infty^2(\gamma+1)\frac{v_x}{u_\infty}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \tag{5.10}$$

根据数理方程可知，亚声速小扰动速度势方程是椭圆型的，超声速小扰动速度势方程

是双曲型的，都是线性方程；跨声速流动小扰动速度势方程是非线性混合型的，而且与气体常数相关。

下面讨论基于亚声速小扰动速度势的线化方程对应的边界条件和压力系数。

从前面介绍的不可压流动小扰动速度势问题边界条件的线化推导过程可以看出，流体压缩性不影响与速度相关边界条件，即以上几种描述可压流动小扰动速度势线化方程的边界条件与前面章节一样；远场条件：$\varphi = 0$，后缘 Kutta - Joukowski 条件；物面线化边界条件：

$$v_y(x,0,z) = u_\infty \frac{\partial y_w}{\partial x} \tag{5.11}$$

在可压流动中不能根据采用 Bernoulli 方程描述压力和速度之间的关系建立压力系数，下面来考察可压缩流动的压力系数：

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{0.5\rho_\infty u_\infty^2}$$

根据等熵关系式：

$$\frac{p}{p_\infty} = \left(\frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2}M_\infty^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{\frac{T_0}{T_\infty}}{\frac{T_0}{T}}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(1 + \frac{a^2 - a_\infty^2}{a_\infty^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$a^2 - a_\infty^2 = \frac{\gamma - 1}{2}u_\infty^2\left[1 - \frac{|V|}{u_\infty^2}\right]^2$$

亚声速和超声速小扰动假设条件下，上式是一个小量，进行 Taylor 展开，得到：

$$\frac{p}{p_\infty} \approx 1 - \frac{\gamma M_\infty^2}{2}\left[2\frac{v_x}{u_\infty} + (1 - M_\infty^2)\frac{v_x^2}{u_\infty^2} + \frac{v_y^2 + v_z^2}{u_\infty^2}\right] \tag{5.12}$$

对于薄翼，略去上式中的二阶小量，代入压力系数定义，在物体表面压力系数：

$$C_p = -2\frac{1}{u_\infty}\frac{\partial\varphi(x, y_w, z)}{\partial x}$$

进一步采取在 $y = 0$ 进行 Taylor 展开，得到与前面不可压流动表述形式完全一样的线化压力系数：

$$C_p = -2\frac{1}{u_\infty}\frac{\partial\varphi(x,0,z)}{\partial x} \tag{5.13}$$

线化压力系数也是可以叠加的，所以薄翼小扰动流场的压力系数也可分别由其相应的厚度问题和弯度问题的压力系数叠加而得。

综上所述，可以证明在亚声速条件下，薄翼小扰动绕流问题也可以分解为无穷远速度为 u_∞、无迎角、厚度分布为 $2y_t(x,z)$ 的对称机翼绕流问题（所谓厚度问题），和无穷远速度为 u_∞、迎角 α、无厚度的曲面 $y_c(x,z)$ 的绕流问题（所谓弯度问题）。由于厚度问题流场的对称性，它的压力系数对机翼的升力以及与升力有关的气动特性没有贡献；根据 D'Alember 疑题，可以证明物体在无粘不可压流体中运动时不产生阻力。因此，机翼绕流问题主要研究弯度问题，由于对升力和与升力有关的气动特性起着主要作用的是弯度，所以

弯度问题有时又称为升力问题。

直接代入亚声速小扰动速度势的线化方程，可以证明：

$$\varphi(x,y,z)=\frac{-Q}{4\pi\sqrt{(x-\xi)^2+\beta^2[(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]}}$$

是方程的基本解，位于点(ξ,η,ζ)处强度为 Q 的点源在流场空间点(x,y,z)处产生的扰动速度势。在不可压流场中，点源速度势的等位面($\Phi=\text{const}$)是圆心为(ξ,η,ζ)的圆球面，流线垂直于等位面，是从中心向外的直线；亚声速小扰动速度势的等位面是椭球面，单独点源产生、垂直于等位面的流线从(ξ,η,ζ)向外逐步变弯(值得指出的是，亚声速小扰动速度势线化方程在$|v_x|,|v_y|,|v_z|\ll u_\infty$条件下成立，对应的流动不考虑自由来流速度势，与实际流动不符合)。

在曲面上连续分布单位面积源强为 $\sigma(\xi,\eta,\zeta)$产生扰动速度势：

$$\varphi(x,y,z)=\oint\!\!\oint_S\frac{-\sigma(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}s}{4\pi\sqrt{(x-\xi)^2+\beta^2[(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]}}$$

在 $y=0$ 平面上曲面连续分布的单位面积涡强为 $\gamma(\xi,\zeta)$、方向与流向 x 轴平行的基元涡产生的扰动速度势：

$$\varphi(x,y,z)=\oint\!\!\oint_S\frac{\gamma(\xi,\zeta)}{4\pi}\frac{y}{y^2+(z-\zeta)^2}\cdot\left[1+\frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+\beta^2[y^2+(z-\zeta)^2]}}\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\zeta$$

自由来流和基元涡扰动速度势叠加以后，在气流速度坐标系内依然满足物面边界条件，因此原则上对亚声速小扰动速度势方程也可以采用前面介绍的不可压流动小扰动速度势处理方法，在机翼曲面上或者线化的机翼平面上分布基本解来代替机翼，建立升力线和升力面基本积分方程，通过边界条件确定待定参数，从而得到小扰动速度势，但是实际应用中采用更为简便的换算法则，直接从机翼不可压流动的气动力特性推出机翼亚声速流动气动力特性。

§5.2　亚声速流动中机翼气动力预估方法

亚声速小扰动速度势线化方程和不可压流动小扰动速度势线化方程都是椭圆型的，具有相同的数学性质，根据椭圆型方程的特点，可以通过变量变换的方法进行解之间的关联。本章主要介绍从亚声速小扰动速度势方程出发，利用前面已有的不可压流动小扰动速度势线化方程的研究成果，对机翼的气动力特性进行预测的计算方法。

定义 x'、y'、z'、φ'和u'_∞为对应不可压流场的空间坐标、扰动速度势和来流速度，在统一的来流速度 $u'_\infty=u_\infty$条件下(动压头相等，速度方向可能不同)，采用如下坐标和变量变换：

$$\left.\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= c_1 y \\ z' &= c_1 z \\ \varphi'(x', y', z') &= c_2 \varphi(x, y, z) \end{aligned}\right\} \tag{5.14}$$

式中 c_1、c_2 为待定常数。代入亚声速流动线性位流方程,得:

$$\frac{\beta^2}{c_2}\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x'^2} + \frac{c_1^2}{c_2}\left(\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z'^2}\right) = 0$$

从上式可看出如令 $c_1 = \beta = \sqrt{1 - M_\infty^2}$,该式就可变成不可压流扰动速度势方程:

$$\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z'^2} = 0 \tag{5.15}$$

由此可看到,亚声速流和不可压流两个流场之间可以进行相互转换。由于 x 坐标与 y、z 坐标用的是不同的缩尺,因此两个流场中机翼的几何形状并不是几何相似,这样的变换关系叫做仿射变换(affine transformation)。按照这种变换所得到的不可压流中机翼的外形与亚声速流中原来机翼外形之间的关系称为仿射相似。

考虑边界条件的变换,仿射变换不影响远场条件和后缘 Kutta – Joukowski 条件;将(5.14)式代入体轴系下亚声速流物面边界条件:

$$\frac{c_1^2}{c_2}\frac{\partial \varphi'}{\partial y'} = u_\infty \left[\frac{\partial y'_w(x', z')}{\partial x'} - c_1 \alpha\right] \tag{5.16}$$

如令 $c_2 = c_1^2 = 1 - M_\infty^2 = \beta^2$, $\alpha' = \beta\alpha$ 则上式变成:

$$\left(\frac{\partial \varphi'}{\partial y'}\right)_{y'=0} = u_\infty \left(\frac{\partial y'_w}{\partial x'} - \alpha'\right) \tag{5.17}$$

正是不可压流中扰动速位 φ' 应满足的边界条件。

通过以上变换过程,从数学原理上对于亚声速流动中任一机翼,根据仿射变换关系是可以设计一个对应的仿射相似的不可压流中的机翼;这样一来按照前面章节介绍的方法求出不可压流中扰动速位 $\varphi'(x', y', z')$,就可以知道亚声速流动扰动速位 $\varphi(x, y, z) = \varphi'(x', y', z')/c_2$,从而解决了亚声速流动线性位流方程求解问题。

下面分析一下两个仿射相似机翼几何参数之间的关系。翼型几何参数、来流迎角之间存在有如下关系:

$$\left.\begin{aligned} c'_{max} &= \beta \cdot c_{max} \\ t'_{max} &= \beta \cdot t_{max} \\ \alpha' &= \beta \cdot \alpha \end{aligned}\right\} \tag{5.18}$$

两机翼平面形状的几何参数存在有如下关系:

$$\left.\begin{aligned} \eta' &= \eta \\ \lambda' &= \frac{l'^2}{S'} = \frac{\beta^2 l^2}{\beta S} = \beta\lambda \\ \tan\chi' &= \frac{1}{\beta}\tan\chi \end{aligned}\right\} \tag{5.19}$$

从式中可见,在同样的相对展向位置(不是风洞坐标系的同一位置),不可压流中仿射相似

机翼的翼型要比原来可压流中机翼的翼型薄，弯度和迎角也小，展弦比也比原可压流中机翼的展弦比来得小，但后掠角大，如图 5.2 所示。

原则上求出亚声速流动扰动速位 $\varphi(x,y,z)=\varphi'(x',y',z')/c_2$ 以后，可以得到可压流中压力系数，积分求出气动力；但是实际应用中，可以直接建立机翼可压流中压力系数与相对应不可压流中压力系数以及机翼气动力的对应关系。

机翼可压流场中压力系数 C_p 与不可压流场中对应点压力系数 C'_p 之间的关系：

$$C_p(x,y,z)=-\frac{2}{u_\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{2}{u_\infty}\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}=\frac{1}{\beta^2}C'_p(x',y',z') \tag{5.20}$$

由于两个流场中机翼外形之间仿射相似，因此在地面风洞坐标系中两个模型满足以上关系的两点之间不是同一位置，即 $(x,y,z)\neq(x',y',z')$。

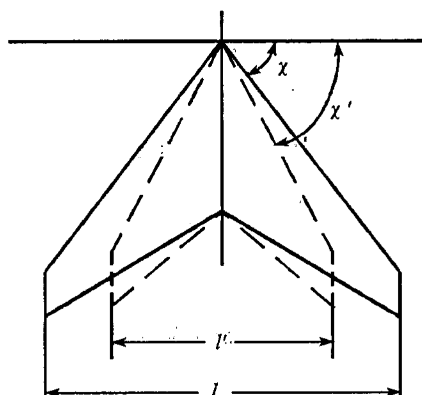


图 5.2　机翼平面形状的仿射变换

机翼可压流中升力系数 C_L 与对应的不可压流场中升力系数 C'_L 之间的关系：

$$C_L=\frac{1}{S}\iint_S(C_{pl}-C_{pu})\mathrm{d}x\mathrm{d}z=\frac{1}{\beta^3 S}\iint_{S'}(C'_{pl}-C'_{pu})\mathrm{d}x'\mathrm{d}z'=\frac{C'_L}{\beta^2} \tag{5.21}$$

式中 C_L 采用可压流模型机翼的面积 S 无量纲，C'_L 采用不可压流中的机翼面积 S' 无量纲，二者之间 $S'=S\beta$。

相对应机翼的俯仰力矩系数之间的关系：

$$C_{mz}=\frac{C'_{mz}}{\beta^2} \tag{5.22}$$

升力系数之间的关系，可知相对应机翼的升力线斜率 C_L^α 之间的关系：

$$\left.\begin{aligned}C_L^\alpha a&=\frac{(C_L^\alpha)'}{\beta^2}\beta\alpha\\ C_L^\alpha&=\frac{(C_L^\alpha)'}{\beta}\end{aligned}\right\} \tag{5.23}$$

以上过程可以看出，根据不可压流中机翼气动特性求出可压流中对应的仿射相似的机翼气动特性，所建立的关系(5.21)式～(5.23)式称为戈泰特法则(Goethert Rule)。在戈泰特法则中，可压和不可压流场中满足仿射相似的两个机翼剖面形状和平面形状不同，使

用戈泰特法则时，相对气流的迎角也不同，因此给气动力的比较和应用带来很大不便。

为此，提出普兰特—葛劳握法则（Prantl - Glauert Rule），建立可压和不可压流场中翼型和迎角相同、平面形状不同两机翼的气动力之间的关系。

先把仿射相似机翼的压力系数之间的关系式改写成：

$$(C_p)_{M_\infty, c, t, \alpha, \lambda, \tan\chi, \eta} = \frac{1}{\beta^2}(C_p)_{0, \beta c, \beta t, \beta\alpha, \beta\lambda, \frac{1}{\beta}\tan\chi, \eta} \tag{5.24}$$

上式左边表示可压流中机翼的压力系数，下标中除第一个表示可压流的马赫数外，其他下标表示可压流中机翼的几何参数；右边表示不可压流中相应机翼的压力系数，下标中除第一个表示不可压流外，其余下标表示对应的不可压流中机翼的几何参数。

在不可压流场中设计这样一个新机翼：翼型剖面形状和迎角与可压缩流中机翼相同，平面形状与不可压缩流对应的仿射相似机翼相同。把可压缩流对应的仿射相似机翼引起的不可压扰动速度势记为 φ'_1；不可压流场中新机翼的扰动速度势记为 φ'_2，这样按照以上符号规则，新机翼的压力系数表示为：

$$(C_p)_{0, c, t, \alpha, \beta\lambda, \frac{1}{\beta}\tan\chi, \eta}$$

在等式(5.24)两侧除以这一压力系数，得：

$$\frac{(C_p)_{M_\infty, c, t, \alpha, \lambda, \tan\chi, \eta}}{(C_p)_{0, c, t, \alpha, \beta\lambda, \frac{1}{\beta}\tan\chi, \eta}} = \frac{1}{\beta^2}\frac{(C_p)_{0, \beta c, \beta t, \beta\alpha, \beta\lambda, \frac{1}{\beta}\tan\chi, \eta}}{(C_p)_{0, c, t, \alpha, \beta\lambda, \frac{1}{\beta}\tan\chi, \eta}} \tag{5.25}$$

前面不可压流动小扰动线化理论已经证明，体轴系下相同平面形状的两个机翼，如果弯度和迎角之间存在线性关系：$y_{w2} = \beta y_{w1}$ 和 $\alpha_2 = \beta\alpha_1$，那么扰动速度势也成正比：$\varphi_2 = \beta \cdot \varphi_1$，推出新机翼与仿射相似机翼的扰动速度势之间 $\varphi'_2 = \beta \cdot \varphi_1$。新机翼与仿射相似机翼的平面形状相同，因此，在不可压流动中两个机翼线化平面上相同位置的压力系数之间存在如下关系：

$$\frac{(C_p)_{0, \beta c, \beta t, \beta\alpha, \beta\lambda, \frac{1}{\beta}\tan\chi, \eta}}{(C_p)_{0, c, t, \alpha, \beta\lambda, \frac{1}{\beta}\tan\chi, \eta}} = \beta \tag{5.26}$$

代入(5.25)式，可压缩流仿射机翼和不可压流动中新机翼压力系数之间：

$$(C_p)_{M_\infty, c, t, \alpha, \lambda, \tan\chi, \eta} = \frac{1}{\beta}(C_p)_{0, c, t, \alpha, \beta\lambda, \frac{1}{\beta}\tan\chi, \eta} \tag{5.27}$$

上式表明机翼在亚声速流 M_∞ 中 (x, y, z) 点的压力系数，等于不可压流中同样翼型和迎角，但展弦比为 $\beta\lambda$、后掠角正切为 $\frac{1}{\beta}\tan\chi$ 的新机翼在 $(x, y, \beta z)$ 点的压力系数除以 β。代入升力系数定义，可以推导出两个机翼之间升力系数的关系：

$$(C_L)_{M_\infty, c, t, \alpha, \lambda, \tan\chi, \eta} = \frac{1}{\beta}(C_L)_{0, c, t, \alpha, \beta\lambda, \frac{1}{\beta}\tan\chi, \eta} \tag{5.28}$$

翼型和迎角相同，去掉上式中相同的参数，进一步简写为：

$$(C_L)_{M_\infty, \lambda, \tan\chi, \eta} = \frac{1}{\beta}(C_L)_{0, \beta\lambda, \frac{1}{\beta}\tan\chi, \eta} \tag{5.29}$$

又因相应两机翼的来流迎角相同，故它们的升力线斜率的关系为

$$(C_L^\alpha)_{M_\infty,\lambda,\tan\chi,\eta}=\frac{1}{\beta}(C_L^\alpha)_{0,\beta\lambda,\frac{1}{\beta}\tan\chi,\eta} \tag{5.30}$$

机翼绕通过机翼某点(例如平均气动弦前缘)平行于 oz 轴线的俯仰力矩和升力只差一个力臂(沿 x 轴方向)关系,仿射变换时,x 方向的坐标值并没有变化,所以俯仰力矩系数和升力系数一样,在翼型和迎角不变的情况下,有如下关系:

$$(C_{mz})_{M_\infty,\lambda,\tan\chi,\eta}=\frac{1}{\beta}(C_{mz})_{0,\beta\lambda,\frac{1}{\beta}\tan\chi,\eta} \tag{5.31}$$

设可压流中机翼压力中心距机翼平均气动弦前缘的 x 向距离为$(x_p)_{0,\beta\lambda,\frac{1}{\beta}\tan\chi,\eta}$,则

$$(C_{mz})_{M_\infty,\lambda,\tan\chi,\eta}=(C_L)_{M_\infty,\lambda,\tan\chi,\eta}\cdot\left(\frac{x_p}{b_A}\right)_{M_\infty,\lambda,\tan\chi,\eta}$$

$$(C_{mz})_{0,\beta\lambda,\frac{1}{\beta}\tan\chi,\eta}=(C_L)_{0,\beta\lambda,\frac{1}{\beta}\tan\chi,\eta}\cdot\left(\frac{x_p}{b_A}\right)_{0,\beta\lambda,\frac{1}{\beta}\tan\chi,\eta}$$

式中$(b_A)_{M_\infty,\lambda,\tan\chi,\eta}$和$(b_A)_{0,\beta\lambda,\frac{1}{\beta}\tan\chi,\eta}$分别表示可压流和相对应不可压流中机翼的平均气动力弦长;即得到可压流中机翼压力中心位置与相对应的不可压流中机翼压力中心位置之间的关系:

$$\left(\frac{x_p}{b_A}\right)_{M_\infty,\lambda,\tan\chi,\eta}\left(\frac{x_p}{b_A}\right)_{0,\beta\lambda,\frac{1}{\beta}\tan\chi,\eta} \tag{5.32}$$

相对位置:$\bar{x}_p=x_p/b_A$,上式就变成:

$$(\bar{x}_p)_{M_\infty,\lambda,\tan\chi,\eta}=(\bar{x}_p)_{0,\beta\lambda,\frac{1}{\beta}\tan\chi,\eta} \tag{5.33}$$

由于无扭转对称翼型机翼的升力主要由迎角所产生,故其压力中心就是机翼的焦点。可压流中机翼焦点位置与对应的不可压流中机翼焦点位置之间的关系:

$$(\bar{x}_F)_{M_\infty,\lambda,\tan\chi,\eta}=(\bar{x}_F)_{0,\beta\lambda,\frac{1}{\beta}\tan\chi,\eta}$$

以上关系式(5.29)~(5.33)称为普兰特—葛劳握法则。

§5.3　亚声速机翼的相仿律

符合普兰特—葛劳握法则的两机翼之间升力线斜率关系式两侧同时除以展弦比,改写为:

$$\left(\frac{C_L^\alpha}{\lambda}\right)_{M_\infty,\lambda,\tan\chi,\eta}=\frac{1}{\beta\lambda}(C_L^\alpha)_{0,\beta\lambda,\frac{\lambda}{\beta\lambda}\tan\chi,\eta}=Y(\beta\lambda,\lambda\tan\chi,\eta) \tag{5.34}$$

可以看出,在不可压流动中只要机翼的几何参数 $\beta\lambda$,$\lambda\tan\chi$,η 相同,对应的亚声速流动中机翼的升力线斜率与展弦比的比值 C_L^α/λ 就相同,这一特性称为亚声速机翼的升力线斜率相仿律。为便于工程应用,利用相仿律把不同平面形状的不可压机翼按照 $\beta\lambda$,$\lambda\tan\chi$,η 整理成曲线,可以很方便的查找到所需要的亚声速机翼的 C_L^α/λ。图 5.3 就是直机翼($\chi_{0.5}=0$)的升力线斜率相仿律曲线。

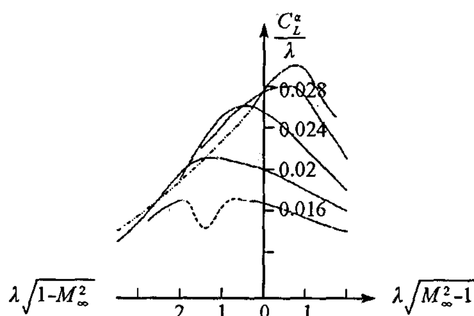


图 5.3 机翼的升力线斜率相仿律曲线

同样,机翼的压力中心和焦点也存在相仿律:

$$\left.\begin{aligned}(\bar{x}_p)_{M_\infty,\lambda,\tan\chi,\eta}=(\bar{x}_p)_{0,\beta\lambda,\frac{\lambda}{\beta\lambda}\tan\chi,\eta}=X_p(\beta\lambda,\lambda\tan\chi,\eta)\\(\bar{x}_F)_{M_\infty,\lambda,\tan\chi,\eta}=(\bar{x}_F)_{0,\beta\lambda,\frac{\lambda}{\beta\lambda}\tan\chi,\eta}=X_F(\beta\lambda,\lambda\tan\chi,\eta)\end{aligned}\right\}\tag{5.35}$$

例 5.1 无扭转平板后掠机翼,展弦比 $\lambda=5$,根梢比 $\eta=1.5$,翼型升力线斜率 $a_0=2\pi$,各剖面 1/4 弦线点连线的后掠角 $\chi_{0.25}=30°$,求飞行马赫数 $M_\infty=0.6$、迎角 $\alpha=5.73°$时的升力系数。

解:亚声速流动,$\beta=\sqrt{1-M_\infty^2}=0.8$,根据普兰特—葛劳握法则对应的不可压流动机翼平面形状:展弦比$(\lambda)_0=\beta\cdot(\lambda)_{M_\infty}=4.0$,后掠角:

$$(\tan\chi_{0.25})_0=\frac{1}{\beta}(\tan\chi_{0.25})_{M_\infty}=0.72$$

$$(\chi_{0.25})_0=35.8°$$

根梢比 $\eta=1.5$,展弦比 $\lambda=5$,代入公式得到有效后掠角:

$$(\tan\chi_e)_0=0.6223$$

$$(\chi_e)_0\approx31.89°$$

推出修正因子图表中的坐标:

$$\frac{\lambda}{a_0\cos\chi_e}=\frac{5}{2\pi\times0.743}=0.9$$

查表知修正因子 $K=0.09$ 和 $\tau=0.08$,因此,有:

$$(C_L^\alpha)_0=\frac{a_0\cdot\cos\chi_e}{1+K\cdot a_0\cdot\cos\chi_e(1+\tau)}=3.385$$

得到迎角 $\alpha=5.73°$时的升力系数:

$$(C_L)_0=(C_L^\alpha)_0\cdot\alpha=3.25\,\frac{\pi\times5.73}{180}=0.338$$

在 $M_\infty=0.6$ 流动中的升力系数:

$$(C_L)_{M_\infty}=\frac{1}{\beta}(C_L)_0=0.423$$

§5.4　压缩性对机翼气动力特性的影响

亚声速机翼失速现象与不可压机翼相似。由于流体压缩性影响，在相同迎角情况下，随着 M_∞ 增大，上、下机翼表面的压力系数绝对值都增大，因此升力线斜率 C_L^α 是增大的。压缩性对机翼最大升力系数的影响与翼型密切相关，对于同一翼型，前缘附近最小压力系数增大意味着沿弦向逆压梯度增大，这样翼型更易于失速，因此一般机翼最大升力系数随着 M_∞ 增大而减小。图 5.4 是某翼型最大升力系数随着 M_∞ 的变化特性。

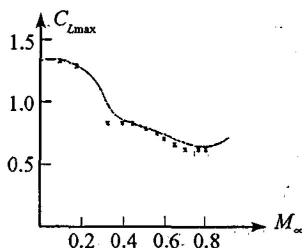


图 5.4　压缩性翼型最大升力系数的影响

根据机翼压力中心相仿律，压缩性对压力中心没有影响，这是由于随着 M_∞ 增大，不可压仿射机翼的展弦比减小使压力中心前移，同时后掠角增大，导致压力中心后移，二者的作用相反。但是，试验表明，对于根梢比 η 和 $\lambda\cdot\tan\chi$ 综合参数较大的机翼，随着 M_∞ 增大压力中心略向后移，对于 η 和 $\lambda\cdot\tan\chi$ 较小的机翼，趋势相反。

对于 $\lambda>3$ 的中等以上展弦比机翼，在亚声速中诱导阻力特性依然可以按照长直机翼公式：

$$C_{Di}=\frac{C_L^2}{\pi\lambda}(1+\delta)=A\cdot C_L^2$$

通过升力特性来估算，其中参数 A 参照不可压后掠机翼查表确定。对于 $\lambda<3$ 小展弦比机翼，要考虑侧缘涡和前缘涡效应，参数 A 根据如下经验公式修正：

$$A=\frac{0.38}{\lambda-0.8C_L(\lambda-1)}\frac{\dfrac{\lambda}{\cos\chi_{0.5}}+4}{\lambda+4}\tag{5.36}$$

习　题

5－1　写出气流坐标系下来流马赫数 $M_\infty=0.4$ 薄翼的小扰动速度势方程及其线化边界条件，并简单说明建立这一数学模型采用的简化和近似假设。

5－2　二维薄翼型在马赫数 $M_\infty=0.7$ 时，物面点压力系数 $Cp=-0.9$，求该翼型在不可压流动中的对应压力系数。

5－3　后掠平板机翼 $\chi_{0.25}=30°$、$\lambda=5$ 和 $\eta=1.5$，计算马赫数 $M_\infty=0.6$、迎角 $\alpha=5°$ 时的升力系数 C_L 和诱导阻力系数 C_{xi}（$C_L=0.423$ 和 $C_{xi}=0.01$）。

5－4　不可压矩形平板机翼 $\lambda=6$、迎角 $\alpha=2°$时 $C_L=0.16$，利用相似律计算马赫数 $M_\infty=0.6$、迎角 $\alpha=4.0°$时的升力系数 C_L。

5-5　在导出亚声速相似律时，曾假设 $u_\infty = u'_\infty$，一般地设 $u'_\infty = c_u u_\infty$，其中 c_u 为变换常数，试证所得的相似律不变(只证压强系数相似律)。

5-6　无扭转的薄机翼，弦线后掠角 $\chi_{0.5} = 40°$、根梢比 $\xi = 0.35$、展弦比 $\lambda = 4.5$，为了实验确定该机翼在飞行马赫数 $M_\infty = 0.7$ 的空气动力特性在 $M_\infty = 0.2$ 的低速风洞中进行试验，试根据仿射相似方法计算该低速机翼的有关几何参数。

5-7　有一后掠平板机翼，弦线后掠角 $\chi_{0.25} = 30°$、根梢比 $\eta = 1.5$、展弦比 $\lambda = 6$，试计算该机翼在飞行马赫数 $M_\infty = 0.6$、迎角 $\alpha = 5.73°$时升力系数 C_L 和诱导阻力系数 C_{xi}。

5-8　为了求得某机翼($\eta = 1$、$\lambda = 4$、$\chi = 45°$、$\bar{t} = 10\%$)在飞行马赫数 $M_\infty = 0.8$，迎角 $\alpha = 3°$时的空气动力，问：

(a)应如何选择不可压气流中普朗特—葛劳握变换机翼的参数 η'、λ'、χ'、$\bar{t}'$和 α'；

(b)假如得到不可压缩气流中变换机翼的 $C_L^\alpha = 4$、$C_{mz} = 0.1$ 和 $\bar{x}'_F = 0.24$，求原机翼在 $M_\infty = 0.8$ 气流中的对应值。

第六章　超声速流动中机翼气动力预测方法

§6.1　超声速流动中翼型气动力特性预测方法

超声速流动图画和气动特性与亚声速时有质的不同。图 6.1 所示，是超声速气流小迎角 α 绕过无厚度平板翼型的波系，其中实线表示为激波，虚线为膨胀波；在前缘之前物体对流场没有扰动，从前缘开始流向发生改变产生激波和膨胀波，整个下翼面压力系数大于零，整个上翼面压力系数小于零，到后缘点因上下翼面压强不等，流向不一致又产生激波和膨胀波，后缘点以后的流场变化不影响翼型气动力；在前后缘之间的扰动传播到无穷远强度不衰减，扰动区流线平行于翼型。

图中还给出有厚度(对称双弧形)翼型迎角 $\alpha = 0$ 的流动图画，翼型头部半顶角的作用使超声速气流在前缘产生两道附体的斜激波，将靠近翼面的气流偏转到与翼型前缘处的切线方向一致，随后气流沿翼型表面的流动相当于绕外凸曲面的流动，产生一系列膨胀波而连续膨胀。上下表面到达后缘的超声速气流，因压强不等，流向不一致而在后缘又产生两道尾激波。头部激波和尾部激波均是曲线激波，原因是膨胀波和激波相交后激波逐渐削弱变弯所致。由于膨胀波和激波相互作用，不管迎角是否为零，都将在来流方向产生一个压差阻力——波阻力。

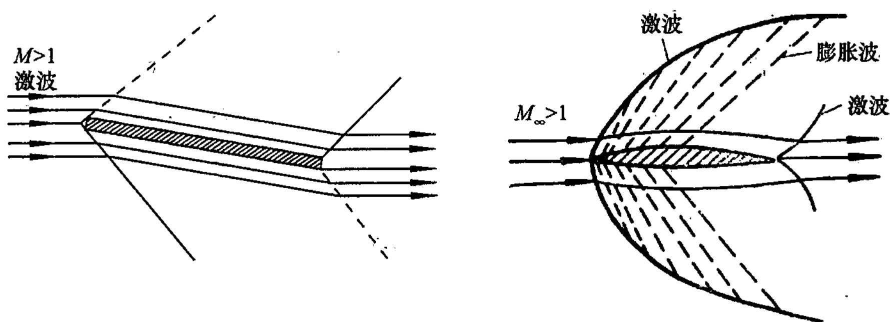


图 6.1　超声速平板机翼和双弧形翼型的波系

超声速翼型小扰动速度势的线化方程是二阶线性双曲型偏微分方程：

$$B^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \tag{6.1}$$

与不可压翼型的扰动速度势方程相比,求解方法也不同。引入变换:

$$\begin{cases}\xi = x - By \\ \eta = x + By\end{cases}$$

对方程(6.1)式进行变换。

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y} = -B\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)\frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2} + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta\partial\eta} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial\eta}{\partial y}$$

$$= -B\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(-B\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} + B\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right) + B\frac{\partial}{\partial\eta}\left(B\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} + B\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)$$

$$= B^2\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2} - 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta\partial\eta} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}\right]$$

代入原方程,得$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta\partial\eta} = 0$;对 ζ 积分:$\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = f^*(\eta)$,对 η 积分:

$$\varphi(\zeta,\eta) = \int f^*(\eta)\mathrm{d}\eta + f_1(\zeta) = f_1(\zeta) + f_2(\eta)$$

代回原变量:

$$\varphi(x,y) = f_1(x - By) + f_2(x + By) \tag{6.2}$$

这里 f_1 和 f_2 是任意函数,称为双曲型线性方程(6.1)通解。

对函数 f_1 而言,在 $\zeta = x - By = c_1$ 描述的直线上 f_1 = 常数;对函数 f_2 而言,$\eta = x + By = c_2$ 描述的直线上 f_2 = 常数。可以画出经过空间 $P(x,y)$点的这两条直线,正好就是马赫数为 M_∞ 超声速均匀来流中 $P(x,y)$点的特征线。只要知道这两条直线上任意点的函数值就可以得到 $P(x,y)$点扰动速度势。

根据超声速扰动传播特点,在前缘点上游是未扰动区 $\varphi = 0$,从前缘点到后缘点的翼型扰动上下表面相互不影响,且扰动也不会穿过翼型传播,在后缘点下游的扰动区对翼型不产生扰动,在上半平面仅有扰动速势 f_1,在下半平面仅有扰动速势 f_2;因此,还可以进一步简化扰动速势:

$$\varphi(x,y) = \begin{cases}f_1(x - By) & y > 0 \\ f_2(x + By) & y < 0\end{cases} \tag{6.3}$$

下面介绍根据翼型物面边界条件确定 f_1 和 f_2 的过程。

例 6.1 平板上半平面有小突起物,形状为 $y = kx(1 - x/L)$,$k \ll 1, 0 < x < L$,利用超声速线化理论证明,该物体诱发的小扰动速度势为:

$$\varphi = -\frac{u_\infty}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}k(x - By)\left(1 - \frac{x - By}{L}\right)$$

证:$y > 0$ 对应的小扰动速度势为:$\varphi = \varphi(\xi) = \varphi(x - By)$,根据边界条件:

$$v_y(x,0,z)=\frac{\partial\varphi}{\partial y}\bigg|_{y=0}=-B\cdot\varphi'(\xi)\big|_{y=0}=u_\infty\left(k-\frac{2kx}{L}\right)$$

$$\varphi'(\xi)\big|_{y=0}=\varphi'(x)=-\frac{u_\infty}{B}\left(k-\frac{2kx}{L}\right)$$

$$\varphi(x)=-\frac{u_\infty}{B}kx\left(1-\frac{x}{L}\right)$$

代入原变量 $\varphi=\varphi(\xi)=\varphi(x-By)=-\dfrac{u_\infty}{\sqrt{M_\infty^2-1}}k(x-By)\left(1-\dfrac{x-By}{L}\right)$,得证。

从理论上说,可用边界条件确定 f_1 和 f_2 以后就可以得到 φ;但实际上关心的是气动力,求 φ 只是一种途径,下面介绍利用 φ 函数表示式,直接通过物面方程,确定表面压力系数。上例中小突起物表面压力系数表达式:

$$C_{pu}=-2\frac{v_x}{u_\infty}\bigg|_{y=0+}=\frac{2}{B}\left(k-\frac{2kx}{L}\right)$$

对于更为一般的情况,根据 φ 函数推出翼型上表面 $y=0_+$ 速度:

$$v_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=f'_1(\xi)\cdot\xi_x=f'_1(\xi)$$

$$v_y=f'_1(\xi)\cdot\zeta_y=-B\cdot f'_1(\xi)=-Bv_x$$

线化压力系数写为:

$$C_{pu}=-2\frac{v_x}{u_\infty}\bigg|_{y=0+}=\frac{2}{B}\frac{v_y}{u_\infty}\bigg|_{y=0+}=\frac{2}{B}\frac{\mathrm{d}y_u}{\mathrm{d}x}\tag{6.4}$$

同样对翼型 $y=0_-$ 下表面有:$v_y=Bv_x$,线化压力系数为:

$$C_{pl}=-\frac{2}{B}\frac{\mathrm{d}y_l}{\mathrm{d}x}\tag{6.5}$$

压力系数沿翼型表面积分,得到气动力:$\boldsymbol{F}=-\oint C_p\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}l$,这里翼型表面单位长度法向矢量:$\boldsymbol{n}=-\sin\theta\boldsymbol{i}+\cos\theta\boldsymbol{j}$,因此气动力:

$$\boldsymbol{F}=\oint C_p\mathrm{d}y\boldsymbol{i}-\oint C_p\mathrm{d}x\boldsymbol{j}=F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}$$

$$\begin{aligned}F_y&=-\oint C_p\mathrm{d}x\\&=-\int_0^b C_{pu}\cdot\mathrm{d}x-\int_b^0 C_{pl}\cdot\mathrm{d}x\\&=\int_0^b(C_{pl}-C_{pu})\cdot\mathrm{d}x\\&=-\frac{2}{B}\int_0^b\left(\frac{\mathrm{d}y_u}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}y_l}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\mathrm{d}x\\&=-\frac{4}{3}\int_0^b\frac{\mathrm{d}y_c}{\mathrm{d}x}\cdot\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
F_x &= \oint C_p \mathrm{d}y \\
&= \int_0^b \left(C_{pu} \frac{\mathrm{d}y_u}{\mathrm{d}x} \right) \mathrm{d}x + \int_b^0 \left(C_{pl} \frac{\mathrm{d}y_l}{\mathrm{d}} x \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^b \left(C_{pu} \frac{\mathrm{d}y_u}{\mathrm{d}x} - C_{pl} \frac{\mathrm{d}y_l}{\mathrm{d}x} \right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{3} \int_0^b \left[\left(\frac{\mathrm{d}y_u}{\mathrm{d}x} \right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y_l}{\mathrm{d}x} \right)^2 \right] \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

对于弯度问题上下翼型曲线方程有：$y_u = y_l = y_c$，因此翼型上下表面线化压力系数大小相等、符号相反：$C_{pu} = -C_{pl}$。前缘点和后缘点记为(x_0, y_0)和(x_1, y_1)，则升力系数：

$$
C_L = \frac{F_y}{b} = -\frac{2}{b} \int_0^b \frac{2}{B} \frac{\mathrm{d}y_c}{\mathrm{d}x} \mathrm{d}x = -\frac{2}{b} \int_{y_0}^{y_1} \frac{2}{B} \mathrm{d}y_c = -\frac{4}{B} \frac{y_1 - y_0}{b} = \frac{4}{B} \tan\alpha \approx \frac{4\alpha}{B} \tag{6.6}
$$

升力线斜率：

$$
C_L^\alpha = \frac{4}{B} \tag{6.7}
$$

线化理论得到的升力系数与翼型几何形状无关，仅与迎角 α 有关，而升力线斜率 C_L^α 仅与来流 M_∞ 有关。

线化位流方程理论得到的超声速薄翼型环量：

$$
\begin{aligned}
\Gamma &= \int_0^b (v_{xu} - v_{xl}) \mathrm{d}x \\
&= -\frac{u_\infty}{2} \int_0^b (C_{pu} - C_{pl}) \mathrm{d}x \\
&= \frac{u_\infty}{2} \cdot C_L \cdot b \\
&= \frac{u_\infty}{2} \cdot \frac{4\alpha}{B} \cdot b \\
&= \frac{2u_\infty \cdot \alpha b}{B}
\end{aligned}
$$

因此证明在升力与环量关系：$Y = \frac{1}{2}\rho_\infty u_\infty^2 \cdot b \cdot \frac{4\alpha}{B} = \rho_\infty u_\infty \cdot \Gamma$，可以看出与不可压流动是一样的。如果是平板薄翼型，涡强沿弦向分布是常数：$\gamma(x) = \frac{\Gamma}{b} = \frac{2\alpha}{B} u_\infty$，这一结论与不可压流动明显不同。

亚声速流动中，翼型弯度问题不产生阻力，但是超声速流动的弯度问题也存在阻力，阻力系数：

$$
C_D = \frac{F_x}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b \frac{2}{B} \left(\frac{\mathrm{d}y_c}{\mathrm{d}x} \right)^2 \mathrm{d}x \tag{6.8}
$$

同样可以求出翼型关于前缘点的俯仰力矩系数（规定抬头为正）：

$$C_{mz} = \frac{1}{b^2}\int_0^b - x \cdot \mathrm{d}C_L = \frac{1}{b^2}\int_0^b (C_{pu} - C_{pl}) \cdot x \cdot \mathrm{d}x = \frac{1}{b^2} \cdot \frac{4}{B}\int_0^b \frac{\mathrm{d}y_c}{\mathrm{d}x} \cdot x \cdot \mathrm{d}x \tag{6.9}$$

由于弯度曲线变化对升力无贡献，故超声速飞行器多采用对称翼型设计，这时弯度问题产生的阻力系数：

$$C_D = \frac{4(\tan\alpha)^2}{B} \approx \frac{4\alpha^2}{B} \tag{6.10}$$

对称翼型超声速俯仰力矩系数：

$$C_{mz} = \frac{1}{b^2} \cdot \frac{4}{B}\int_0^b \frac{\mathrm{d}y_c}{\mathrm{d}x} \cdot x \cdot \mathrm{d}x = -\frac{2\alpha}{B} \tag{6.11}$$

对称翼型的压心和焦点相对位置：

$$\left.\begin{aligned} X_p &= -\frac{C_{mz}}{C_L} = \frac{1}{2} \\ X_F &= -\frac{\partial C_{mz}}{\partial C_l} = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \tag{6.12}$$

与不可压翼型气动特性相比，超声速对称翼型的压心和焦点位置从低速翼型的 1/4 弦线点后移到 1/2 弦线点。大部分超声速飞行器是从地面起飞，需要从低速加速到设计的超声速飞行状态，压心和焦点的变化对操纵性和安定性提出更高要求。

根据 D' Alember 疑题，可以证明物体在无粘亚声速流体中运动时不产生阻力，所以机翼绕流问题主要是研究弯度问题，但是在超声速情况下这一结论不再成立，需要研究厚度问题。

对于厚度问题，翼型上下表面线化压力系数相等：

$$C_{pu} = \frac{2}{B}\frac{\mathrm{d}y_u}{\mathrm{d}x} = \frac{2}{B}\frac{\mathrm{d}y_t}{\mathrm{d}x} = -\frac{2}{B}\frac{\mathrm{d}y_l}{\mathrm{d}x} = C_{pl}$$

升力系数 $C_L = 0$ 和俯仰力矩系数 $C_{mz} = 0$ 为零；产生的阻力系数：

$$C_{D0} = \frac{1}{b}\int_0^b \frac{2}{B}\left[\left(\frac{\mathrm{d}y_u}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y_l}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]\mathrm{d}x = \frac{4}{bB}\int_0^b\left[\left(\frac{\mathrm{d}y_t}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]\mathrm{d}x \tag{6.13}$$

翼型总的阻力系数是弯度问题和厚度问题产生的阻力系数之和：

$$C_D = \frac{R_x}{b} = \frac{4}{B\cdot b}\int_0^b\left[\left(\frac{\mathrm{d}y_u}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y_l}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]\mathrm{d}x = \frac{4}{B\cdot b}\int_0^b\left[\left(\frac{\mathrm{d}y_c}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y_t}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]\mathrm{d}x$$

其中在升力为零时的阻力系数称为零升力波阻系数，记为：C_{D0}，对于无弯度翼型，零升波阻力系数就是厚度问题产生的阻力系数。

以上压力系数是采用风轴系表示的，如果采用翼型几何形状函数体轴系表示，只需把以上风轴系公式中 $y_c(x)$、$y_t(x)$、$y_u(x)$和 $y_l(x)$的导数进行如下近似替换：

$$\frac{\mathrm{d}y_w}{\mathrm{d}x} \approx \frac{\mathrm{d}y_b}{\mathrm{d}x} - \alpha \tag{6.14}$$

体轴系翼型物面与来流夹角 θ，采用一阶近似$\frac{\mathrm{d}y_b}{\mathrm{d}x} - \alpha \approx \tan\theta \approx \theta$，上下翼面的压力系数写为统一形式：

$$C_p = \pm\frac{2\theta}{B} = \pm\frac{2\theta}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \tag{6.15}$$

相对与来流为压缩的边界 θ 取正值，相对与来流为膨胀的边界 θ 取负值。将(6.14)式代入以上气动力表达式，得到在体轴系下的升力阻力系数：

$$\begin{aligned}
C_L &= -\frac{2}{B}\cdot\frac{1}{b}\int_0^b\left[\frac{dy_w}{dx_w}\bigg|_u + \frac{dy_w}{dx_w}\bigg|_l\right]dx_w \\
&= -\frac{2}{B}\cdot\frac{1}{b}\int_0^b\left\{\left(\frac{dy_b}{dx_b}-\alpha\right)\bigg|_u + \left(\frac{dy_b}{dx_b}-\alpha\right)\bigg|_l\right\}dx_b \\
&= \frac{4\alpha}{B} - \frac{1}{b}\cdot\frac{2}{B}\int_0^b\left[\frac{dy_b}{dx_b}\bigg|_u + \frac{dy_b}{dx_b}\bigg|_l\right]dx_b = \frac{4\alpha}{B}
\end{aligned} \tag{6.16}$$

$$C_L = \frac{4\alpha}{B}\text{(不变化)}$$

体轴系下的阻力系数：

$$\begin{aligned}
C_D &= \frac{2}{B}\cdot\frac{1}{b}\int_0^b\left[\left(\frac{dy_w}{dx_w}\bigg|_u\right)^2 + \left(\frac{dy_w}{dx_w}\bigg|_l\right)^2\right]dx_w \\
&= \frac{2}{B}\cdot\frac{1}{b}\int_0^b\left\{\left[\left(\frac{dy_b}{dx_b}-\alpha\right)\bigg|_u\right]^2 + \left[\left(\frac{dy_b}{dx_b}-\alpha\right)\bigg|_l\right]^2\right\}dx_b \\
&= \frac{4\alpha}{B} + \frac{1}{b}\cdot\frac{2}{B}\int_0^b\left[\left(\frac{dy_b}{dx_b}\bigg|_u\right)^2 + \left(\frac{dy_b}{dx_b}\bigg|_l\right)^2\right]dx_b \\
&= \frac{4\alpha^2}{B} + C_{D0}
\end{aligned} \tag{6.17}$$

例 6.2 有一双凸面的翼型，上下表面方程为：

$$y_u = 0.28\left(x - \frac{x^2}{b}\right),\quad y_l = -0.12\left(x - \frac{x^2}{b}\right)$$

试用超声速线化理论计算该翼型在 $M_\infty = 1.72$ 时气动力随迎角的变化特性。

解：上下表面方程为体轴坐标系，气流与物面夹角为：

$$\theta_u = \frac{dy_u}{dx} - \alpha = 0.28\left(1 - 2\frac{x}{b}\right) - \alpha$$

$$\theta_l = \frac{dy_l}{dx} - \alpha = \left[0.12\left(1 - 2\frac{x}{b}\right) + \alpha\right]$$

升力系数仅与迎角有关：

$$C_L = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} = 2.86\alpha$$

零升阻力系数与迎角无关，在体轴坐标系和风轴系是一样的：

$$\begin{aligned}
(C_D)_0 &= \frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}\cdot\frac{1}{b}\int_0^b\left[\left(\frac{dy_u}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy_l}{dx}\right)^2\right]dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{1.72^2 - 1}}\cdot\frac{1}{b}\int_0^b\left\{\left[0.28\left(1 - \frac{2x}{b}\right)\right]^2 + \left[0.12\left(1 - \frac{2x}{b}\right)\right]^2\right\}dx \\
&= 0.0442
\end{aligned}$$

总阻力系数：

$$C_D = \frac{4\alpha^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} + (C_D)_0 = 2.86\alpha^2 + 0.0422$$

对前缘点的力矩系数：

$$\begin{aligned} C_{mz} &= \frac{4}{B} \cdot \frac{1}{b^2} \cdot \int_0^b x\left(\frac{\mathrm{d}y_c}{\mathrm{d}x} - \alpha\right)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{2\alpha}{B} + \frac{4}{B} \cdot \frac{1}{b^2} \cdot \int_0^b x\frac{\mathrm{d}y_c}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}C_L - 0.0381 \\ &= -1.43\alpha - 0.0381 \end{aligned}$$

相对压心：

$$X_p = -\frac{C_{mz}}{C_L} = 0.5 + \frac{0.0135}{\alpha}$$

气动焦点：

$$X_F = -\frac{\partial C_{mz}}{\partial C_L} = 0.5$$

对于双弧形薄翼，小扰动速度势的线化方程预测得到的压力系数分布和实验值、Euler方程精确解之间的比较见图6.2(a)；下翼面的前半部，理论与实验的结果较一致，上翼面则偏差较大，这主要是因为线化理论用马赫波代替了激波，而目前翼型的负迎角和相对厚度都较大，上翼面前缘激波较强，使算得的上翼面压强偏小；下表面的后部，理论与实验的结果的偏差亦较大，这一方面是由于实际气流是有粘性的，在翼型下表面的后段附面层增厚、外流膨胀角减小，使实际的压强比理论计算的较大，另一方面是由于通过后缘激波产生的压强要沿附面层内的亚音速流区域往上游传播，这些现象在线化理论中都是没有考虑的。

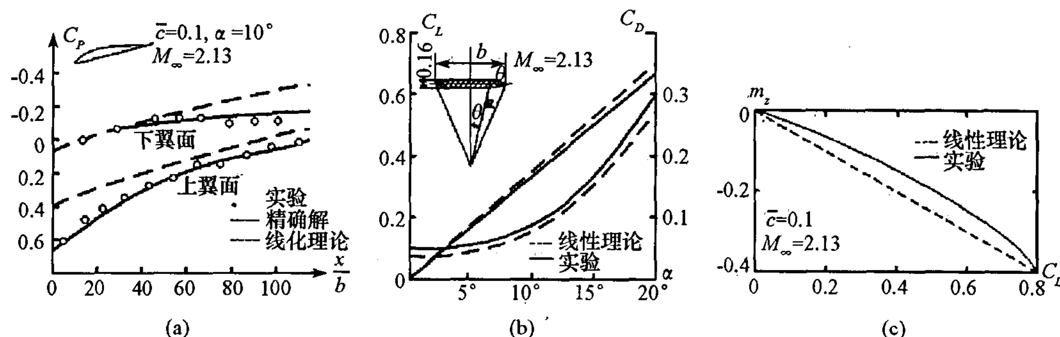


图6.2　线化理论得到的理论解和实验数据的比较

图6.2(b)和(c)中还给出小扰动线化理论预测得到的气动力特性和实验结果的比较，对升力来说，压强在翼型前后缘理论和实验的差异正好相互抵消掉一部分，二者综合效果使得理论预测值与实验相差较小，但是对俯仰力矩来说有线性理论预测得到的压强

在翼型前后缘难以抵消，引起较大误差，实验比线性理论预测值要大。由于小扰动线化理论没有考虑粘性，因此预测得到的阻力系数比实验值小。

为提高理论预测值的精度，Busemann 在压力系数简化过程中保留了二次项，提出所谓的"二级理论"，本文中不作介绍，有兴趣的读者可以参考相关资料。值得一提的是，根据前面的分析，如果压力系数关于扰动速度势是非线性，翼型的绕流问题分解为弯度问题和厚度问题以后，压力系数是无法叠加的。

在小迎角情况下，对于斜置角为 χ 的无限翼展斜置翼，来流马赫数 M_∞ 可分解成一个垂直于斜置翼前缘的法向分量 $M_{\infty n}=M_\infty\cdot\cos\chi$ 和一个与斜置翼前缘平行的切向分量 $M_{\infty t}=M_\infty\cdot\sin\chi$。若不考虑气流粘性，切向分量 $M_{\infty t}$ 对机翼的气动特性不产生影响，无限翼展斜置翼的气动特性主要取决于来流马赫数的法向分量 $M_{\infty n}$；因此，如前面章节所述那样，可以借助于以来流马赫数为 $M_{\infty n}$ 绕过由斜置翼的法向翼型所组成的正置机翼（二维翼型）的流动来计算绕无限翼展斜置翼的气动力。由此可见，只有当 $M_{\infty n}>1$ 时无限翼展斜置翼的绕流才具有超声速特性，否则，$M_{\infty n}<1$ 时，即使来流是超声速的，但是依然可以按照亚声速的方法处理。

值得一提的是，由于无限翼展斜置机翼来流马赫数 M_∞ 和正置翼型来流马赫数为 $M_{\infty n}$ 的马赫角不同，如图 6.3 所示意，对应位置点上影响区和扰动区有很大差别，实际流动特性和方程特性完全不同，因此只有在线化意义下才能分解，利用无限翼展斜置机翼沿等比例弦长的物理参数完全相同，即正置翼型弦线任意点上物理量与弦长比例相等的无限翼展斜置机翼物理量相同这一特征进行分析。



图 6.3　无限翼展机翼的依赖区

现在主要讨论 $M_{\infty n}>1$ 时无限翼展斜置翼的气动特性。

前面第四章已经介绍，如果作用在无限翼展斜置机翼和对应正置翼型上相同点上的压力相等，不同动压头下定义的压力系数之间的关系：

$$C_p=\frac{p-p_\infty}{0.5\rho\cdot u_\infty^2}=\frac{p-p_\infty}{0.5\rho\cdot\left(\dfrac{u_{\infty n}}{\cos\chi}\right)^2}=C_{pn}\cdot\cos^2\chi \tag{6.18}$$

无限翼展斜置机翼和对应正置翼型弦长之间 $b=\dfrac{b_n}{\cos\chi}$，坐标变换 $x=\dfrac{x_n}{\cos\chi}$ 是线性的，即正置翼型上弦向 x_n 点在无限翼展斜置机翼对应的位置就是 x。单位长度无限翼展斜置机翼和对应正置翼型上的升力系数关系如下：

$$C_L=C_{Ln}\cdot\cos^2\chi \tag{6.19}$$

无限翼展斜置机翼迎角和对应翼型迎角之间：

$$\alpha_n \approx \sin\alpha_n = \frac{u_\infty \sin\alpha}{u_{\infty n}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\chi} \approx \frac{\alpha}{\cos\chi} \tag{6.20}$$

正置翼型的厚度问题不产生升力，弯度问题升力系数为：

$$C_{Ln} = \frac{4\alpha_n}{B_n} = \frac{4\alpha_n}{\sqrt{M_n^2 - 1}}$$

可以推出单位长度无限翼展斜置机翼的升力系数：

$$C_L = \frac{4\alpha \cdot \cos\chi}{\sqrt{M_\infty^2 \cdot \cos^2\chi - 1}} \tag{6.21}$$

以及升力线斜率：

$$C_L^\alpha = \frac{4\cos\chi}{\sqrt{M_\infty^2 \cdot \cos^2\chi - 1}} \tag{6.22}$$

可以看出，当 $M_\infty \cos\chi > 1$ 的大部分情况下，后掠角对升力线斜率影响较小；但是在 $M_\infty \cos\chi \approx 1$ 附近，后掠角非常敏感，小的变化会引起升力线斜率剧烈增加。

前面第四章已经介绍，根据压力系数之间的关系（6.18）式，可以推出单位长度无限翼展斜置机翼和对应正置翼型上的阻力系数关系如下：

$$C_D = C_{Dn} \cdot \cos^3\chi \tag{6.23}$$

正置翼型的阻力系数：

$$C_{Dn} = \frac{4\alpha_n^2}{B_n} + C_{D0n} = \frac{4\alpha^2}{\cos^2\chi\sqrt{M_\infty^2 \cdot \cos^2\chi - 1}} + C_{D0n} \tag{6.24}$$

其中，第一项是与迎角相关产生的诱导阻力，第二项是零升力波阻系数。对应的无限翼展斜置机翼与迎角相关产生的阻力系数：

$$C_D = \frac{4\alpha^2 \cdot \cos\chi}{\sqrt{M_\infty^2 \cdot \cos^2\chi - 1}} + C_{D0n}\cos^3 x \tag{6.25}$$

当 $M_\infty^2 \cos\chi > 1$ 的情况下，后掠角对诱导阻力部分影响较小，零升力波阻系数大致按照 $\cos^2\chi$ 的关系减小，所以超声速飞行器多采用较大的后掠角；同样在 $M_\infty \cos\chi \approx 1$ 附近，后掠角非常敏感，较小的变化会引起阻力系数剧烈增加。

§6.2　薄翼在超声速流动中的流动特征

上一节研究无限翼展斜置机翼的绕流问题时已经发现，机翼斜置以后，相对于前缘的流动特性发生变化。图 6.4 以平板后掠机翼为例来说明来流马赫角与机翼后掠角变化导致超声速绕流的不同特征，当 $M_{\infty n} < 1$ 时，图 6.4(a)中示意，即使来流是超声速的，但是由于机翼顶点扰动影响到整个机翼前缘，上下翼面扰动相互干扰，气流在到达前缘之前已经调整，因此前缘附近的压力系数分布表现出亚声速机翼绕流的特征，随着前缘曲率半径减小，压力系数趋向负无穷；当 $M_{\infty n} > 1$ 时，图 6.4(c)中示意，气流在到达前缘之前未受到任

何干扰,机翼前缘附近有一部分翼面的流动具有无限翼展斜置机翼特征。对于有限翼展机翼后缘也有类似的差异,来流马赫角小于机翼后缘后掠角情况下,气流在到达后缘之前未受后缘的影响,只有在后缘线上为满足后缘条件,进行压缩和膨胀,但是对于无粘流动,后缘线上扰动不向上游传播,因此附近压力系数分布没有恢复到自由来流值的趋势,上下翼面发生突跃;在来流马赫角大于机翼后缘后掠角情况下,与亚声速机翼绕流的特征一致,气流在到达后缘之前就被干扰,后缘附近压力系数分布受到上下翼面绕流共同的影响。

为此,提出如下根据来流马赫数 M_∞ 与机翼后掠角的相对位置定义的超声速和亚声速前后缘,以及在超声速小扰动速度势研究中与常规定义不同的机翼前缘、后缘和侧缘的定义。

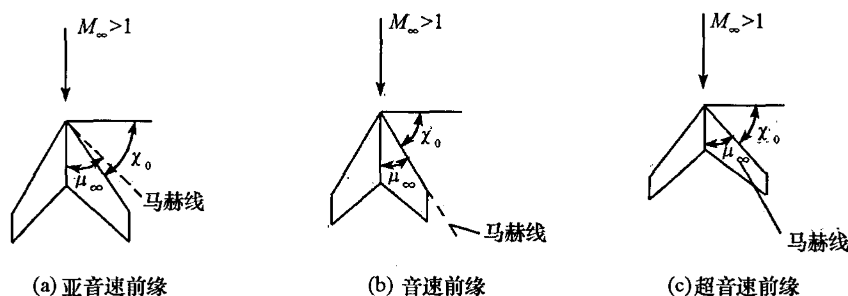


图 6.4 超音速机翼前缘后掠角和来流马赫角的影响

在超声速机翼的平面形状中,定义与来流平行的线段是侧缘;与来流平行的直线进入机翼平面首次相交的线段为前缘,离开机翼平面二次相交的线段为后缘,显然对于给定平面形状的机翼,前缘、后缘和侧缘不是固定的。

来流马赫角 μ_∞ 与速度和声速的关系 $\sin\mu_\infty = a_\infty/u_\infty = 1/M_\infty$ 或 $\tan_{an}\mu_\infty = 1/\sqrt{M_\infty^2-1}$,前缘后掠角与速度关系 $\sin(\pi/2-\chi_0) = u_{\infty n}/u_\infty$,因此有:

$$M_{\infty n} = M_\infty\cos\chi_0 = \frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\chi_0\right)}{\sin\mu_\infty} \tag{6.26}$$

当 $M_{\infty n}>1$ 称为超声速前缘,这时有:$\pi/2-\chi_0>\mu_\infty$ 或 $\pi/2-\mu_\infty>\chi_0$;当 $M_{\infty n}<1$ 称为为亚声速前缘,这时有:$\pi/2-\chi_0<\mu_\infty$ 或 $\pi/2-\mu_\infty<\chi_0$。为方便计算,定义参数:$m_0 = B/K_0$,式中 $K_0=\tan\chi_0$;$m_0>1$ 超声速前缘,$m_0<1$ 亚声速前缘。

同样,对于机翼后缘,定义参数 $m_1 = B/K_1$ 和 $K_1=\tan\chi_1$,来确定超声速和亚声速后缘,$m_1>1$ 超声速后缘,$m_1<1$ 亚声速后缘。

在超声速机翼平面形状中,存在一些区域,其中任意点的依赖区内仅仅包含一条前缘直线,这些区域可以看作无限翼展斜置机翼的一部分处理,形成所谓“二维区”。如图 6.5 所示,矩形机翼的二维区为倒梯形,三维区为左右两个翼尖直角三角形区,区内任意点的依赖区包括前缘和侧缘。超音速前缘三角翼有翼根三维区,区内任意点的依赖区包括两个前缘,三维区外左右各有一块二维区,区内任意点的依赖区只包括一个前缘。梯形后掠

翼的三维区包括翼根和翼尖三维区，其余才是二维区。

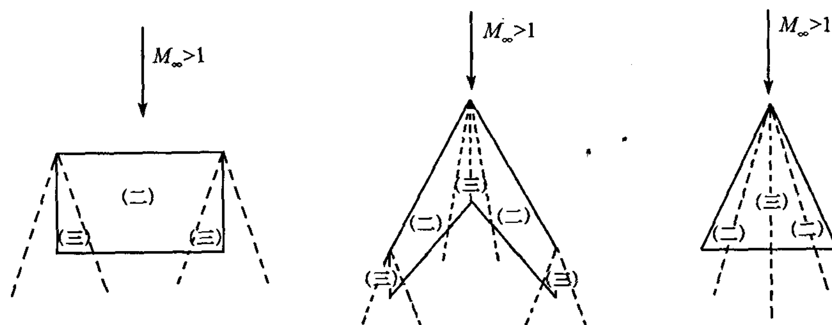


图 6.5　超音速机翼的二维区与三维区

对一个确定的梯形平板后掠翼，随着 M_∞ 从大变到小，其前后缘将顺序出现超音速前缘超音速后缘，亚音速前缘超音速后缘，亚音速前缘亚音速后缘的情况。下面来分析三维机翼超音速绕流的特点。

1. 超音速前缘、超音速后缘

完全处于二维区的弦向 $A-A$ 剖面上的压强分布可按无限翼展斜置翼来计算，与机翼平面形状无关。部分处于二维区的 $B-B$ 剖面上，二维区那段与二维斜置翼的超音速特性相同，但在顶点马赫线后处于翼根的三维区，上下翼面气流受到翼根部分影响而发生改变，出现与平面形状有关的三维效应。但是，上下翼面气流在到达后缘之前相互之间没有影响，后缘压差载荷为有限值。

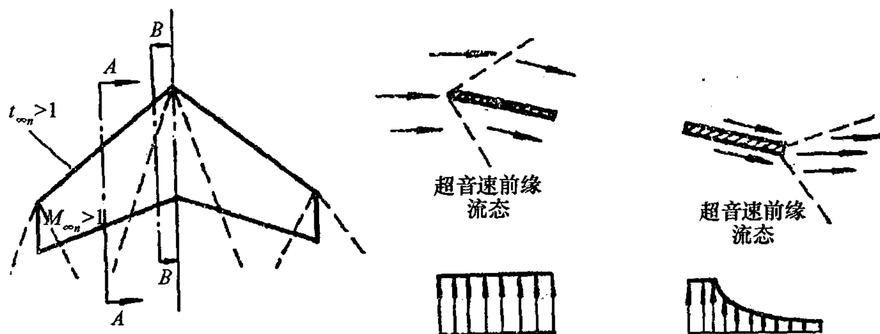


图 6.6　超声速前后缘流态与压力分布

2. 亚音速前缘、超音速后缘

这种情况的一个明显特点是翼面上不存在二维区，全是三维区。$A-A$ 剖面弦向载荷特点是，前缘具有亚声速绕流特性，压强载荷为无穷，后缘具有超声速绕流特性，压差载荷均为有限值。

3. 亚音速前缘、亚音速后缘

此种情况最显著的特点是后缘也要影响翼面上的流动，且上下面通过后缘流动汇合而互相影响。$A-A$ 剖面弦向载荷特点是具有亚声速绕流特性，前缘载荷为无穷，后缘压

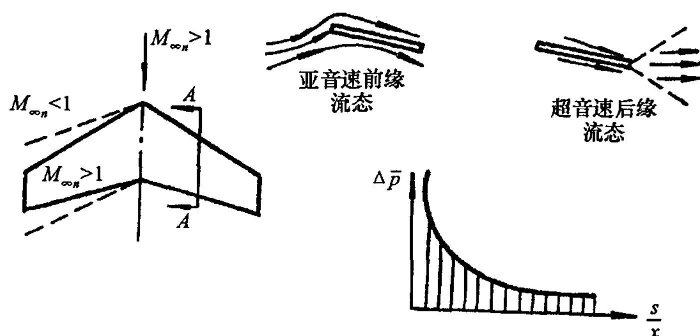


图 6.7　亚音速前缘、超声速后缘流态与压力分布

差载荷均为零。

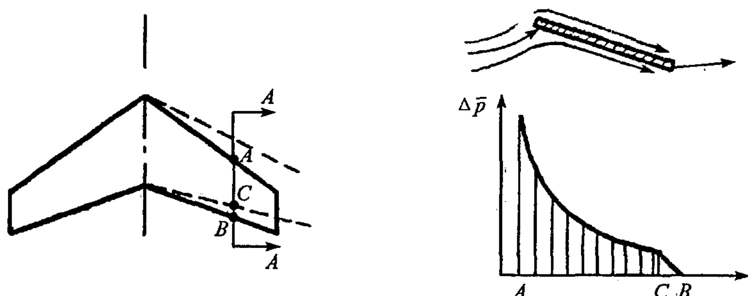


图 6.8　亚音速前后缘流态与压力分布

§6.3　超声速流动中机翼的线化理论

第四章中给出无粘、定常、等熵、无旋、小扰动$|v_x|,|v_y|,|v_z|\ll u_\infty$假设条件下，超声速机翼小扰动速度势的线化方程：

$$B^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0 \tag{6.27}$$

也推导了可压流动的线化压力系数：

$$C_p=-2\frac{1}{u_\infty}\frac{\partial\varphi(x,0,z)}{\partial x} \tag{6.28}$$

直接代入超声速小扰动速度势的线化方程，可以证明：

$$\varphi(x,y,z)=-\frac{Q}{2\pi\sqrt{(x-\xi)^2-B^2[(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]}}$$

是方程的基本解，表示位于点(ξ,η,ζ)处强度为 Q 的点源在流场空间点(z,y,z)处产生的扰动速度势。根据 Q 强度物理含义，表示从点源向外流出的体积流量，等于在点源微小领域内流速和面积的积分，由于超声速点源不会向上游传递，相当于面积积分减少一

半，因此小扰动速度势中的系数从 4π 变为 2π。

前面已经介绍，亚声速小扰动速度势的线化方程得到的点源，等位面是椭球面，流场中仅仅包含(ξ,η,ζ)一个奇点，所有流线来自该点；扰动向周围传播过程中不断减弱，理论上认为在无穷远 $r=\infty$ 这个抽象数学极限点处边界条件 $\varphi=0$ 成立。超声速小扰动速度势点源的等位面是双曲面，在空间上从(ξ,η,ζ)点附近就有扰动传播不到的"死区"（方程无解区域），由于超声速流动扰动不会向上游传播，向下游传播也是范围有限，因此在数学上满足 $\varphi=0$ 的边界条件是一个区域；根据点源产生的"扰动速度"所作出的流线不仅从点源(ξ,η,ζ)处出发，而是来自锥形奇性面，如图 6.9 所示。值得指出的是，这里"扰动速度"是指在$|v_x|,|v_y|,|v_z|\ll u_\infty$条件下$(v_x,v_y,v_z)$，图 6.9 中流线没有考虑自由来流速度，不是实际流动速度的流线；超声速小扰动速度势线化方程所描述流动的流线应该根据(v_x+u_∞,v_y,v_z)给出。

在三维空间以扰动点为顶点、马赫角 μ_∞ 常数构成的锥面称为超声速流动的马赫锥。如图 6.10 所示，根据双曲型方程的性质，在(ξ,η,ζ)点产生扰动的影响仅仅局限于这一点下游的马赫锥内（所谓影响区）；空间任意点(x,y,z)流动参数变化只与这一点上游马赫锥内（所谓依赖区）参数相关，求机翼上任意 P 点的扰动速度势，仅考虑其上游马赫锥内的影响则可。

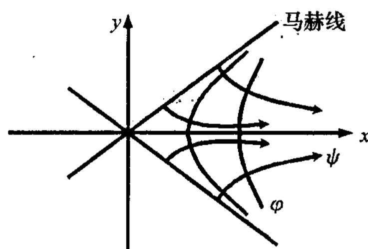


图 6.9　亚声速和超声速点源"扰动速度"流线

特别指出：因为 $B=\sqrt{M_\infty^2-1}$是一个常数，因此根据小扰动速度势的线化方程得到的流场中不存在激波和其他强度膨胀波，只有相互平行的马赫线。对于图 6.1 中表示平板和双弧形翼型的流动图像有明显不同，在线化理论中，无论是平板还是双弧形翼型，所有波系都退化为自由来流的马赫波。

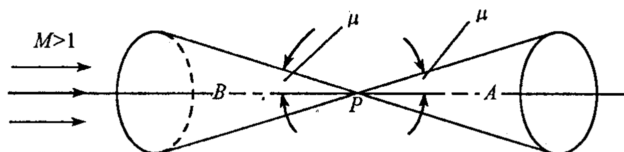


图 6.10　超声速扰动影响区和依赖区形成的马赫锥

在曲面上连续分布单位面积源强为 $\sigma(\xi,\eta,\zeta)$产生扰动速度势：

$$\varphi(x,y,z)=\iint_S\frac{-\sigma(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}s}{2\pi\sqrt{(x-\xi)^2-B^2[(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]}}$$

原则上,也可以采用分布表达形式已知的基本解近似机翼的扰动;但是,前面介绍的亚声速小扰动速度势线化方程和不可压流动小扰动速度势线化方程都是椭圆型的和超声速小扰动速度势方程式双曲型的,除了以上可以看出,在基本解的常数和速度势表达形式上也有不同,更重要的是,基本解的影响区域是有限的,任意点上扰动速度也是仅仅受到有限区域基本解的影响,其他区域的基本解对该点不产生影响,因此在以上积分公式中,积分区域 Σ 与亚声速情况不同,不是机翼围成的面积,同时在边界条件方面也存在一定的差异。

从以上分析可知,超声速小扰动速度势方程在 $y=0$ 平面线化边界条件下可分为三部分:未受扰动区(R)、机翼表面(S)和除物面外受扰动区(T),如图 6.11 所示。

与亚声速问题相比,R 区不再是一个抽象的数学概念,R 和 T 在机翼附近就存在明确的分界线。例如,对于亚声速流动中有限基本解只有在驻点和源点出现奇性,超声速流动中除源点外,在整个马赫锥面上都是奇性的,如果采用分布有限基本解来代替机翼产生的扰动,需要在延伸到无穷下游的马赫锥面上布置连续点源,如图 6.11 所示。

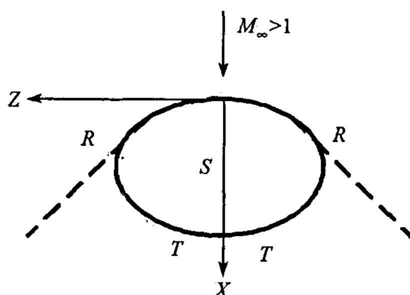


图 6.11 机翼线化平面的边界类型

在来流马赫数(或 $B=\sqrt{M_\infty^2-1}$)确定的情况下,根据线性方程的性质,可以证明超声速薄翼小扰动绕流问题也可以分解为厚度问题和弯度问题的线性叠加。厚度问题研究无穷远速度为 u_∞、无迎角、厚度分布为 $2y_t(x,z)$ 的对称机翼绕流问题;弯度问题研究无穷远速度为 u_∞、迎角 α、无厚度的曲面 $y_c(x,z)$ 的绕流问题(所谓)。超声速机翼各区域边界条件的数学描述如下。

1. 未受扰动 R 区

在未受扰动 R 区,厚度问题和弯度问题一样,为:$\varphi=0$。

2. 物面 S 区

在物面 S 区,满足线化边界条件,对于气流坐标系:$v_y(x,0,z)=u_\infty \partial y_w/\partial x$;这与亚声速流动线化边界条件相同, 对于弯度问题,上下翼面方程是一致的,边界条件写为:

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{y=0}=u_\infty\frac{\partial y_c}{\partial x}$$

对于厚度问题,上下翼面方程关于 $y=0$ 对称,边界条件写为:

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{y=0+}=u_\infty\frac{\partial y_u}{\partial x}=u_\infty\frac{\partial y_t}{\partial x}$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{y=0-}=u_\infty\frac{\partial y_l}{\partial x}=-u_\infty\frac{\partial y_t}{\partial x}$$

3. 受扰动 T 区

在 $M_\infty<1$ 情况下，T 区延伸到无穷远，除了机翼后缘拖出自由涡面以外的区域流动参数连续，可以作为流场内点处理，不需要提边界条件；自由涡面强度有物体表面边界条件附着涡确定，因此也不需要专门处理。在 $M_\infty>1$ 情况下，T 区在空间上有一定范围，而且根据超声速流动特征，进一步分为两个区域：影响区包括机翼那些点构成的那部分区域(T_1)才需要关心，其他区域，如超声速后缘下游的区域流动受到机翼干扰，但是对机翼没有影响，可以不考虑。

对于厚度问题，根据流动的对称特征可以提 $v_y=0$ 边界条件，与物面边界条件共同构成波动方程的 Lieman 问题，在数学上处理较为成熟。

对于弯度问题，上下翼面扰动的影响区分别沿马赫锥传播到 T_1 区，对于 T_1 区的影响较为复杂，导致 T_1 区内流动参数需要具体分析以后确定。

首先，把 T_1 区看作与来流速度平行的假想翼面，不改变流场特性；由于假想翼面上速度连续，因此气动载荷为零：

$$C_p\Big|_{y=0+}=-\frac{2}{u_\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|_{y=0+}=C_p\Big|_{y=0-}=-\frac{2}{u_\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|_{y=0-}$$

推出关系式：

$$v_x(x,0_+,z)=v_x(x,0_-,z)$$

其次，考虑在 $y=0$ 上下翼面上边界条件是一样的，因此小扰动速度势 φ 是 y 的奇函数，即 $\varphi(x,-y)=-\varphi(x,y)$，对 x 求导以后，取 $y\to0$ 极限，得到：

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{y=0+}=-\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{y=0-}$$

即 v_x 关于 $y=0$ 平面反对称：

$$v_x(x,0_+,z)=-v_x(x,0_-,z)$$

综合以上推理得出的结论，在 T_1 区可以建立 $v_x=0$ 条件。扰动势在流场各点连续可微：

$$\mathrm{d}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathrm{d}z$$

取 $y=0$ 平面，平行于流向 x 轴的直线从未扰动区到扰动区积分：

$$\varphi_T-\varphi_R=\int_R^T\mathrm{d}\varphi=\int_R^T v_x(x,0,z)\mathrm{d}\varphi=0$$

因此推出在 T_1 扰动区的扰动势：

$$\varphi_T=\varphi_R=0$$

在 $M_\infty<1$ 情况下，需要满足机翼后缘的 Kutta－Joukowski 条件才能确定附着涡强度大小；对于超声速机翼，后缘可能满足、也可能不满足 Kutta－Joukowski 条件，具体流动机理可以参见上一节。

§6.4 超声速流动中薄翼气动力特性预测方法

低速和亚声速薄翼小扰动的厚度问题对气动力影响较小，未进行细致讨论，仅仅通过低速翼型的例题说明可以通过布置源的方法来解决。超声速薄翼小扰动的厚度问题对气动力有贡献，下面首先讨论厚度问题。

§6.4.1 薄翼的厚度问题的点源分布法

与亚声速流动一样的原理，机翼物面边界条件已经线化到 $y=0$ 平面上以后，在机翼平面形状上布置单位面积强度为 $\sigma(\xi,\zeta)$ 连续源，在空间任一点 $P(z,y,z)$ 引起的扰动速度势：

$$\varphi(x,y,z) = -\frac{1}{2\pi}\oint\!\!\oint_{\Sigma}\frac{\sigma(\xi,\zeta)}{\sqrt{(x-\xi)^2-B^2[y^2+(z-\zeta)^2]}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\zeta \tag{6.29}$$

由于在超声速流场中 $P(x,y,z)$ 扰动速度势仅仅与依赖区域内的源有关，因此积分区域不是整个机翼平面形状，而是马赫锥与机翼的相交线和机翼平面形状边缘构成的翼面上区域（S 区），加上 P 点前马赫锥在 $y=0$ 平面与机翼外侧以及顶点马赫线形成的扰动区（T 区）。因为在厚度问题中，T 区 y 方向扰动速度分量 $v_y(x,0,z)=0$，相当于在这个区域分布源强度 $\sigma(\xi,\zeta)=0$ 的点源，或者直接不对这一区域进行积分。积分区域如图 6.12 所示，如果 P 点不在 $y=0$ 平面上，马赫锥与机翼的相交线是双曲线，双曲线方程：

$$(x-\xi)^2-B^2[y^2+(z-\zeta)^2]=0 \tag{6.30}$$

如果 P 点在 $y=0$ 平面上，马赫锥与机翼的相交线为直线。

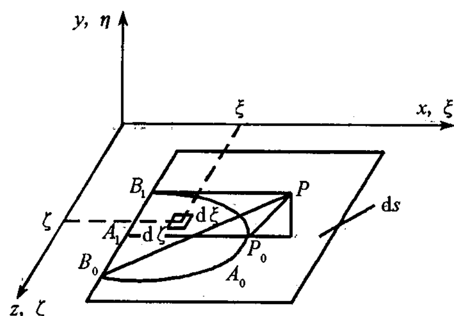


图 6.12 超声速点源分布法的积分区域示意图

机翼平面形状上布置连续的源在 P 点上产生的 y 方向扰动速度分量：

$$\begin{aligned} v_y(x,y,z) &= -\frac{1}{2\pi}\oint\!\!\oint_{\Sigma}\frac{\sigma(\xi,\zeta)\cdot B^2y}{\{(x-\xi)^2-B^2[y^2+(z-\zeta)^2]\}^{3/2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\zeta \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_{x_{A1}}^{x_{A0}}\mathrm{d}\xi\int_{\zeta_{B_1A_0}}^{\zeta_{B_0A_0}}\frac{\sigma(\xi,\zeta)\cdot B^2y}{\{(x-\xi)^2-B^2[y^2+(z-\zeta)^2]\}^{3/2}}\mathrm{d}\zeta \end{aligned} \tag{6.31}$$

曲线 B_1A_0 和 B_0A_0 是马赫锥与机翼的相交双曲线的两侧分支，满足方程：

$$\zeta_{B_1A_0} = z - \frac{1}{B}\sqrt{(x-\xi)^2 - B^2y^2}$$

$$\zeta_{B_0A_0} = z + \frac{1}{B}\sqrt{(x-\xi)^2 - B^2y^2}$$

即使源强度 $\sigma(\xi,\zeta)$ 为常数，写出(6.29)式的内积分：

$$\int_{\zeta_{B_1A_0}}^{\zeta_{B_0A_0}} \frac{1}{\{(x-\xi)^2 - B^2[y^2+(z-\zeta)^2]\}^{3/2}}\mathrm{d}\zeta$$

$$= -\frac{z-\zeta}{[(x-\xi)^2 - B^2y^2]\sqrt{(x-\xi)^2 - B^2[y^2+(z-\zeta)^2]}}\Bigg|_{\zeta_{B_1A_0}}^{\zeta_{B_0A_0}}$$

可以看出在积分上下限取值点处，积分函数出现奇性，因此不能直接求出 y 方向扰动速度分量。实际应用中，需要根据线化理论的边界条件来确定源强度 $\sigma(\xi,\zeta)$。

考察 $y=0$ 面上 y 方向扰动速度分量：$v_y=(x,0,z)=\lim\limits_{y\to 0}v_y(x,y,z)$，根据(6.31)式可以看出，除了$(\xi\to x,\zeta\to z)$点外，其余区域的积分为零；因此对 $v_y(x,0,z)$ 起作用的仅仅是 $\sigma(x,z)$，或者说在求 $v_y(x,0,z)$ 时仅仅需要$(x,0,z)$ 微小邻域 δ 内的积分扰动速度势：

$$\varphi'(x,y,z) = -\frac{1}{2\pi}\oiint_{\delta}\frac{\delta(\xi,\zeta)}{\sqrt{(x-\xi)^2 - B^2[y^2+(z-\zeta)^2]}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\zeta$$

在微小邻域 δ 内取源强 $\sigma(\xi,\zeta)$ 的一阶近似 $\sigma(\xi,\zeta)\approx\sigma(x,z)$，得到：

$$\varphi'(x,y,z) = -\frac{\sigma(x,z)}{2\pi}\oiint_{\delta}\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 - B^2[y^2+(z-\zeta)^2]}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\zeta \tag{6.32}$$

在微小邻域 δ 内，整个机翼连续源 $\sigma(\xi,\zeta)$ 引起的扰动速度势 $\varphi(x,y,z)$，等于强度为常数的点源 $\sigma(x,z)$ 引起的扰动速度势 $\varphi'(x,y,z)$，尽管在空间任一点 $P(x,y,z)$ 相差很大，但是 $y=0$ 平面上二者 y 方向扰动速度分量 $v_y(x,0,z)$ 是一样的：

$$v_y(x,0,z) = \frac{\partial\varphi}{\partial y}\bigg|_{y=0} = \frac{\partial\varphi'}{\partial y}\bigg|_{y=0}$$

这样一来(6.32)式的内积分写为：

$$\int_{\zeta_{B_1A_0}}^{\zeta_{B_0A_0}}\frac{1}{\{(x-\xi)^2 - B^2[y^2+(z-\zeta)^2]\}^{1/2}}\mathrm{d}\zeta = -\frac{1}{B}\text{arcsini}\frac{-B(z-\zeta)}{\sqrt{(x-\xi)^2 - B^2y_2}}\Bigg|_{\zeta_{B_1A_0}}^{\zeta_{B_0A_0}}$$

$$= \frac{\pi}{B}$$

得到扰动速度势：

$$\varphi'(x,y,z) = -\frac{\sigma(x,z)}{2B}(x_{A_0} - x_{A_1}) \tag{6.33}$$

根据超声速扰动传播特性和图 6.12 中几何关系，有：

$$x_{A_0} = \begin{cases} x - By & y > 0 \\ x + By & y < 0 \end{cases} \tag{6.34}$$

写出上下翼面扰动速度势：

$$\varphi'(x,y,z)=\begin{cases}-\dfrac{\sigma(x,z)}{2B}(x-By-x_{A_1}) & y>0\\ -\dfrac{\sigma(x,z)}{2B}(x+By-x_{A_1}) & y<0\end{cases}\tag{6.35}$$

根据翼面边界条件：

$$v_y(x,0,z)=\begin{cases}\dfrac{\sigma(x,z)}{2} & y=0_+\\ -\dfrac{\sigma(x,z)}{2} & y=0_-\end{cases}=u_\infty\frac{\partial y_w}{\partial x}$$

来建立源强 $\sigma(x,z)$与机翼外形几何参数的关系：

$$\sigma(x,z)=\begin{cases}2u_\infty\dfrac{\partial y_u}{\partial x}=2u_\infty\dfrac{\partial y_t}{\partial x} & y=0_+\\ -2u_\infty\dfrac{\partial y_l}{\partial x}=2u_\infty\dfrac{\partial y_t}{\partial x} & y=0_-\end{cases}\tag{6.36}$$

已知机翼厚度分布，根据上式可以求出代替机翼存在布置的连续源强 $\sigma(x,z)$函数，代入(6.29)式得到扰动速度势 $\varphi(x,y,z)$，从而预测超声速机翼气动力特性。

根据线化压力系数的表达式：

$$C_{pu}=-2\frac{v_x}{u_\infty}\bigg|_{y=0+}=-\frac{2}{u_\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\bigg|_{y=0+}$$

$$C_{pl}=-2\frac{v_x}{u_\infty}\bigg|_{y=0-}=-\frac{2}{u_\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\bigg|_{y=0-}$$

在求解机翼平面形状压力系数时仅仅需要扰动速度势对 x 变量的偏导数；因此直接使用在机翼平面形状任一点 $P(x,0,z)$处的扰动速度势：

$$\varphi(x,0,z)=-\frac{1}{2\pi}\iint_{\Sigma_s}\frac{\sigma(\xi,\zeta)}{\sqrt{(x-\xi)^2-B^2(z-\zeta)^2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\zeta\tag{6.37}$$

式中积分区域 Σ_s 是从点$(x,0,z)$马赫线与机翼前缘或侧缘围成的区域。

在应用中为了便于积分，引入变量替换：

$$\begin{cases}r=\xi-B\zeta\\ s=\xi+B\zeta\end{cases}\quad 或\quad \begin{cases}\xi=0.5(r+s)\\ \zeta=0.5\dfrac{(s-r)}{B}\end{cases}$$

扰动速度势写为：

$$\varphi(x,0,z)=-\frac{1}{4\pi B}\iint_{\Sigma_s}\frac{\sigma(\xi,\zeta)}{\sqrt{(r_P-r)(s_p-s)}}\mathrm{d}r\mathrm{d}s\tag{6.38}$$

式中 $P(x,0,z)$ 点坐标：$r_P=x-Bz,s_P=x+Bz$。

从原理上说，对于任意给定机翼外形，就可以确定源强度分布 $\sigma(x,z)$，代入以上积分公式求出扰动势、x 方向扰动速度，根据线化压力系数的表达式得到机翼表面压强，从而得到厚度问题需要解决的阻力特性(厚度问题不产生升力)。实际应用中，积分区域需要根据前缘、后缘和侧缘特性来确定。

下面给出较为典型的尖前缘、剖面斜率为常数、流向无限长的角形翼的压力系数分布

特性。三角形翼如图 6.13 示意，角形翼剖面斜率为常数 $\tan\varepsilon \approx \varepsilon$，上翼面源强：$\sigma(x,z) = 2u_\infty\varepsilon$；厚度问题中机翼上下表面关于 $y = 0$ 对称，下翼面剖面斜率为常数 $\tan(-\varepsilon) \approx -\varepsilon$，源强：$\sigma(x,z) = -2u_\infty\cdot(-\varepsilon) = 2u_\infty\varepsilon$，$y > 0$ 和 $y < 0$ 空间上的扰动势之间存在关系：$\varphi(x,0_-,z) = \varphi(x,0_+,z) = \varphi(x,0,z)$。另外，对于厚度问题，根据以上分析在扰动 T 区，相当于分布源强：$\sigma(x,z) = 0$，在数学上等价于直接减去这一部分积分面积。

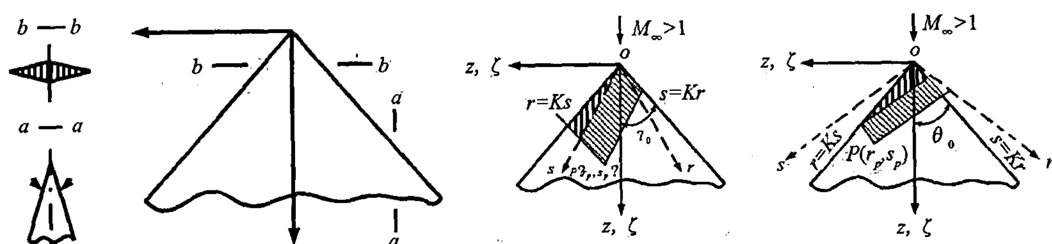


图 6.13　剖面斜率为常数尖前缘角形翼外形以及积分区域

采用前缘后掠角、自由来流马赫数定义的参数：

$$m = B\cdot\tan\theta_0 = B\cdot\tan\left(\frac{\pi}{2} - \chi_0\right)$$

$$K = \frac{1 - B\cdot\tan\theta_0}{1 + B\cdot\tan\theta_0} = \frac{1 - m}{1 + m}$$

机翼平面形状左前缘方程为：$r = K\cdot s$，右前缘方程为：$s = K\cdot r$，$P(x,0,z)$ 点前马赫线与左前缘交点为：$(K\cdot s_P, s_P)$；前马赫线与右前缘交点为：(r_P, K, r_P)。

对于 $m > 1$ 的超声速前缘，如果 $P(x,0,z)$ 点位于二维区，可以按照翼型理论求出翼面压力系数，由于机翼剖面斜率为常数，因此压力系数也为常数，可以根据前面介绍的无限长斜置机翼方法求出。如果 $P(x,0,z)$ 点位于三维区，写出如下扰动速度势积分表达式：

$$\begin{aligned}\varphi(x,0,z) = -\frac{u_\infty\varepsilon}{2\pi B}\Bigg\{&\int_0^{s_p}\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{(s_p - s)}}\int_{K\cdot s}^{0}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{(r_p - r)}}\\&+\int_0^{r_p}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{(r_p - r)}} + \int_{K\cdot s}^{s_p}\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{(s_p - s)}}\Bigg\}\end{aligned} \tag{6.39}$$

$$\int_0^{s_p}\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{(s_p - s)}}\int_{K\cdot s}^{0}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{(r_p - r)}} = \int_0^{s_p}\frac{-2\sqrt{r_p} + 2\sqrt{r_p - K\cdot s}}{\sqrt{(s_p - s)}}\mathrm{d}s$$

$$\int_0^{r_p}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{(r_p - r)}}\int_{K\cdot s}^{s_p}\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{(s_p - s)}} = \int_0^{r_p}\frac{2\sqrt{s_p - K\cdot r}}{\sqrt{(r_p - r)}}\mathrm{d}r$$

由于 $K < 0$，利用积分关系式：

$$\int\frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{-a}}\arctan\frac{-2ax - b}{\sqrt{b^2 - 4ac}}\qquad(a < 0, b^2 > 4ac)$$

处理上式中积分，得到：

$$\varphi(x,0,z) = -\frac{u_\infty\varepsilon}{2\pi B}\left\{(r_P - K\cdot s_p)\frac{-1}{\sqrt{-K}}\left[\arcsin\frac{r_P + K\cdot s}{r_P - K\cdot s}\right]\Bigg|_0^{s_p}\right\}$$

$$+\left\{(s_P - K\cdot r_p)\frac{-1}{\sqrt{-K}}\left[\arcsin\frac{s_P + K\cdot r}{s_P - K\cdot r}\right]\Bigg|_0^{r_p}\right\}$$

进一步求导，得到 x 方向扰动速度分量 $v_x(x,0,z)$：

$$\begin{aligned}v_x(x,0,z) &= \frac{\partial\varphi(x,0,z)}{\partial x}\\&= \frac{\partial\varphi(r_P,s_P)}{\partial r_P} + \frac{\partial\varphi(r_P,s_P)}{\partial s_P}\\&= -\frac{u_\infty\varepsilon}{2\pi B}\frac{1-K}{\sqrt{-K}}\left[\pi - \arcsin\frac{2(K+1)(r_p+s_p)\sqrt{(-K\cdot r_p\cdot s_p)}}{(s_p - K\cdot r_p)(r_p - K\cdot s_p)}\right]\end{aligned}$$

引入锥形坐标变量：$t = \dfrac{B\cdot z}{x}$，整理得到：

$$v_x(x,0,z) = -\frac{u_\infty\cdot\varepsilon\cdot m}{B\sqrt{m^2-1}}\left[1 - \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{1-t^2}{m^2-t^2}}\right] \tag{6.40}$$

得到超声速前缘上翼面三维区内任意点 $P(x,0,z)$ 压力系数：

$$C_{pu}(x,0,z) = \frac{2\cdot\varepsilon\cdot m}{B\sqrt{m^2-1}}\left[1 - \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{1-t^2}{m^2-t^2}}\right] \tag{6.41}$$

$t = 1$ 对应的就是前缘顶点发出的马赫线，压力系数在马赫线上不存在跳跃，因此这两条马赫线上的压力系数也就是二维区翼面压力系数：

$$C_{pu(2)}(x,0,z) = \frac{2\cdot\varepsilon\cdot m}{B\sqrt{m^2-1}} \tag{6.42}$$

根据无限翼展斜置机翼和对应翼型的相关公式，翼型剖面斜率变为 $\varepsilon_n = \varepsilon/\cos\chi_0$，可以得到翼型的压力系数为：

$$C_{pu(n)} = \frac{2\varepsilon_n}{B_n} = \frac{2\varepsilon_n}{\sqrt{M_\infty^2\cdot\cos^2\chi_0 - 1}}$$

这样上式可以写为：

$$C_{pu(2)}(x,0,z) = \frac{2\cdot\varepsilon_n\cdot\cos\chi_0\cdot B\cdot\cot\chi_0}{B\sqrt{(B\cdot\cot\chi_0)^2 - 1}} = C_{pu(n)}\cdot\cos^2\chi_0$$

对于 $m < 1$ 的亚声速前缘，上翼面 $P(x,0,z)$ 点位于三维区，扰动速度势除了翼面外，还有前缘马赫线与前缘之间的扰动区域（T 区）；前面已经讨论过，对于厚度问题，T 区相当于是源强为零的翼面，对 $P(x,0,z)$ 点扰动势没有贡献，可以在积分式中直接剔除这一部分面积：

$$\begin{aligned}\varphi(x,0,z) = -\frac{u_\infty\varepsilon}{2\pi B}\Bigg\{&\int_0^{K\cdot s_p}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{(r_p - r)}}\int_{K\cdot r}^{r_p/K}\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{(s_p - s)}}\\&+\int_{K\cdot s_p}^{r_p}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{(r_p - r)}}\int_{K\cdot r}^{s_p}\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{(s_p - s)}}\Bigg\}\end{aligned} \tag{6.43}$$

$$\varphi(x,0,z) = -\frac{u_\infty\varepsilon}{2\pi B}\left\{-\int_0^{K\cdot s_p}\frac{2\sqrt{s_p - \frac{r}{K}}}{\sqrt{(r_p - r)}}\mathrm{d}r + \int_0^{r_p}\frac{2\sqrt{s_p - K\cdot r}}{\sqrt{(r_p - r)}}\mathrm{d}r\right\}$$

得到 x 方向扰动速度分量 $v_x(x,0,z)$：

$$v_x(x,0,z) = -\frac{2u_\infty \cdot \varepsilon \cdot m}{\pi B\sqrt{1-m^2}}\arccos\sqrt{\frac{1-t^2}{m^2-t^2}} \tag{6.44}$$

得到亚声速前缘上翼面任意点 $P(x,0,z)$ 压力系数：

$$C_{pu}(x,0,z) = \frac{4\varepsilon \cdot m}{\pi B\sqrt{1-m^2}}\arccos\sqrt{\frac{1-t^2}{m^2-t^2}} \tag{6.45}$$

以上角形翼在流向无限长，实际的机翼在流向有限长，存在后缘的影响；一般情况下为了减少底阻，从最大厚度线开始厚度减小直到后缘为零。下面讨论如图 6.14 示意的双楔形剖面三角翼，图中 ε_1 和 ε_2 分别表示前楔形和后楔形的半角，根据厚度问题边界条件，在三角形 OAB 和三角形 OAC 上点源强度为 $2u_\infty\varepsilon_1$，在三角形 ABC 点源强度为 $2u_\infty\varepsilon_2$；χ_0 和 χ_c 分别表示前缘和最大厚度线的后掠角，表征参数分别记为：$m_0 = B/\tan\chi_0$ 和 $m_c = B/\tan\chi_c$，显然有：$m_c > m_0$。根据 m_0 和 m_c 的关系分为如下三种情况。

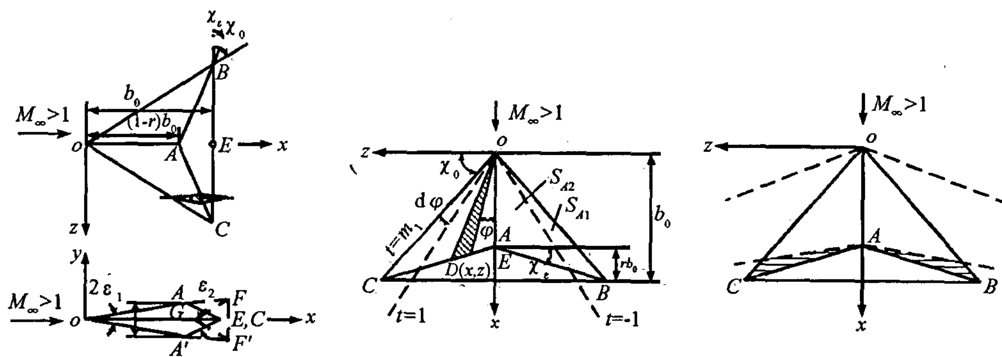


图 6.14　双楔形剖面三角翼

第一种是超声速前缘和超声速最大厚度线：$m_c > m_0 > 1$。

首先，计算 OAB 和 OAC 两个三角形产生的阻力。这种情况下 ABC 点源对最大厚度线以前的区域没有影响，OAB 和 OAC 压力系数与上面介绍的尖前缘角形翼一致，点源强度为 $2\mu_\infty\varepsilon_1$。OAC 气动力与 OAB 相同，OAB 分为二维区 S_2 和三维区 S_3；根据上面超声速前缘上翼面二维区和三维区内压力系数公式，考虑厚度问题只有阻力，阻力在流向分量为：

$$F_{x1} = \frac{4\varepsilon_1 \cdot m_0 \cdot \varepsilon_1 \cdot q_\infty}{B\sqrt{m_0^2-1}}\left[\iint_{S_2}\mathrm{d}\sigma + \iint_{S_3}\left(1-\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{1-t^2}{m_0^2-t^2}}\right)\mathrm{d}\sigma\right] \tag{6.46}$$

在最大厚度线上任意点 $D(x,z)$ 与 x 轴夹角记为 ψ，该点附近线段微元与顶点形成三角形(图中阴影部分)就是积分微元，采用一阶近似，可以写为：

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2}\frac{x}{\cos\psi}\frac{x}{\cos\psi}\mathrm{d}\psi$$

$D(x,z)$ 落在最大厚度线上，满足直线方程：

$$x = (1-c)b_0 + z\tan\chi_c = (1-c)b_0 + x\tan\psi\cdot\tan\chi_c$$

$$x=\frac{(1-c)b_0}{1-\tan\psi\cdot\tan\chi_c}$$

这里 c 为翼剖面最大厚度点到后缘点距离相对于当地弦长的比例，又知：

$$\begin{cases}\tan\psi=\dfrac{z}{x}=\dfrac{t}{B}\\ b_0=(1-c)b_0+b_0\cdot\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\chi_0\right)\cdot\tan\chi_c\end{cases}$$

推出：

$$\begin{cases}\tan\chi_c=c\cdot\tan\chi_0=\dfrac{c\cdot B}{m_0}\\ x=\dfrac{m_0(1-c)b_0}{m_0-t\cdot c}\end{cases}$$

这样积分面积微元：

$$\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2}\frac{b_0^2}{B}\frac{m_0^2(1-c)^2}{(m_0-t\cdot c)^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}S\frac{m_0(1-c)^2}{(m_0-t\cdot c)^2}\mathrm{d}t$$

这里 $S=b_0^2/\tan\chi_0=b_0^2m_0/B$ 为三角翼面积，也是气动力系数参考面积。

代入积分表达式(6.46)，得到 OAB 和 OAC 这两部分三角形产生的阻力系数：

$$C_{D1}=\frac{F_{x1}}{S\cdot q_\infty}=\frac{8\varepsilon_1^2}{\pi B}G(m_0,c) \tag{6.47}$$

为方便下面表述，这里引入函数：

$$G(m,c)=\frac{(1-c)^2\cdot m^2}{\sqrt{m^2-1}}\left[\int_1^m\frac{\pi}{2(m-c\cdot t)}\mathrm{d}t+\int_0^1\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\sqrt{\frac{1-t^2}{m^2-t^2}}\right)\frac{1}{2(m-c\cdot t)}\mathrm{d}t\right]$$

其次，计算整个三角翼 OBC 点源强度为 $2u_\infty\varepsilon_1$ 的扰动在 ABC 上产生的阻力(实际为推力)。从面积可以看出，这部分阻力相当于面积 OBC 减去面积 OAB 和 OAC 的贡献。面积 OBC 积分函数为 $G(m_0,0)$，OAB 和 OAC 总的积分函数为 $G(m_0,c)$，因此这部分压力在锲形半角为 ε_2 投影得到的阻力系数：

$$C_{D2}=\frac{8\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2}{\pi B}[G(m_0,0)-G(m_0,r)] \tag{6.48}$$

最后，计算在 ABC 上锲形半角为 ε_2 扰动源强在 ABC 上产生的阻力(实际为推力)。由于前面第二部分计算中考虑的是整个 OBC 面积，多算了 ABC 面积，因此需要减去 $2u_\infty\varepsilon_1$ 的贡献，相当于 $2u_\infty\varepsilon_2-2u_\infty\varepsilon_1$。求出这部分阻力系数：

$$C_{D3}=\frac{8(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\cdot\varepsilon_2}{\pi B}G(m_c,0) \tag{6.49}$$

根据 $G(m_c,0)$ 建立过程，采用三角翼 ABC 面积作为无量纲化，因此求总阻力时需要转换为 OBC 面积作为无量纲化：

$$C_D=C_{D1}+C_{D2}+\frac{S_{ABC}}{S_{OBC}}C_{D3} \tag{6.50}$$

第二种是亚声速前缘和超声速最大厚度线：$m_c > 1 > m_0$。

这种情况下 ABC 点源对最大厚度线以前的区域没有影响，第三部分阻力依然可以用类似于以上 $m_c > m_0 > 1$ 的计算公式。在计算第一部分和第二部分的阻力时，没有二维区积分区域，存在扰动的三维区内关于参数 t 的积分上限也不是 1，因此不能继续采用 $G(m,c)$ 函数来描述，需要根据亚声速前缘的压力系数表达式(6.45)和积分区域建立新的函数表达式。

第三种是亚声速前缘和亚声速最大厚度线：$1 > m_c > m_0$。

这时 ABC 内点源对最大厚度线以前的区域有影响，如图 6.14 中右图所示，需要计算源强为 $2u_\infty \varepsilon_2 - 2u_\infty \varepsilon_1$ 在阴影区域引起的扰动在锲形半角为 ε_1 投影产生的阻力；计算时也采用亚声速前缘的压力系数表达式(6.45)和积分区域建立新的函数表达式。

在参考文献[1]中根据以上得到的厚度问题阻力系数的表达式整理成图表，进行讨论。本文直接采用所得出的结论：

(1)对于 $m_c > m_0 > 1$ 情况，随着在最大厚度线的参数 c 减小阻力系数先降低后升高，在附近 $c = 0.5$ 存在一个极小值，但是机翼的零升阻力系数总是大于同一翼型的零升阻力系数。

(2)对于 $1 > m_c > m_0$ 情况，随着在最大厚度线的参数 c 减小，阻力系数也是降低后升高，在最大厚度线靠近前缘 $c \approx 0.9$ 附近存在极小值，前缘后掠角越大(m_0 越小)这个极小值越小，机翼的零升阻力系数可能小于同一翼型的零升阻力系数。

(3)对于 $m_c > 1 > m_0$ 情况，与 $1 > m_c > m_0$ 情况较为相似，最大厚度线靠近前缘存在一个极小值；但是，随着在最大厚度线的参数 c 减小，还可能存在第二个极小值点。

具体细节可以参考文献[1]。

§6.4.2　薄翼弯度问题的点源分布法

由于弯度问题中认为机翼厚度为零，因此低速和亚声速薄翼的弯度问题难以采用分布点源方法。低速薄翼小扰动的弯度问题通过布置涡得到升力面方程和升力线方程，转化为涡强度的积分方程问题，采用级数求其近似解；亚声速薄翼原则上可以用同样方法计算，但是应用中采用通过 Goethert 法则和 Prantl - Glauert 法则从低速薄翼的气动力特性给出。超声速薄翼小扰动的弯度问题可以采用布置涡的方法求解，但是从下面分析中可以看出，也可以采用分布点源的方法求解。

对于前后缘都是亚声速的机翼($1 > m_1 > m_0$ 情况)，整个机翼表现为亚声速绕流特性，按照前面介绍的亚声速机翼的方法进行处理。下面讨论超声速后缘($m_1 > 1$)但是不同前缘的机翼。

对于前缘都是超声速的机翼($m_0 > 1$ 情况)：

上下翼面之间流动相互不影响，因此可以分开处理，研究上翼面流动时不考虑下翼面；这时补充与上翼面关于线化 $y = 0$ 平面对称的"虚拟下翼面"，形成"虚拟薄翼厚度"，上翼面压力系数可以采用分布强度为 $\sigma(\xi,\zeta) = 2u_\infty \partial y_c/\partial\xi$ 点源来求出。如果采用变量

(r,s)表示上翼面的斜率，上翼面 $y=0_+$ 点源强度为 $\sigma(r,s)=2u_\infty\cdot\tau_c(r,s)$，上任意点的扰动势：

$$\varphi(x,0_+,z) = -\frac{u_\infty}{2\pi B}\oiint_{\Sigma}\frac{\tau_c(r,s)}{\sqrt{(r_p-r)(s_p-s)}}\mathrm{d}r\mathrm{d}s \tag{6.51}$$

同样，求解下翼面流动时不考虑上翼面，补充与上翼面关于线化 $y=0$ 平面对称的“虚拟上翼面”，形成“虚拟薄翼厚度”。弯度问题上下翼面斜率相同，但是下翼面 $y=0_-$ 点源强度变为 $\sigma(r,s)=-2u_\infty\cdot\tau_c(r,s)$，下翼面上任意点的扰动势：

$$\varphi(x,0_+,z) = \frac{u_\infty}{2\pi B}\oiint_{\Sigma}\frac{\tau_c(r,s)}{\sqrt{(r_p-r)(s_p-s)}}\mathrm{d}r\mathrm{d}s \tag{6.52}$$

可以看出，对于弯度问题机翼上下表面相等 $y_u=y_c=y_l$，上下翼面的源强大小相等、符号相反，上下翼面扰动势之间存在关系：

$$\varphi(x,0_-,z) = -\varphi(x,0_+,z)$$

按照上一节厚度问题把机翼分为二维区和三维区，确定积分区域以后，就可以求出压力系数。例如，对于超声速前后缘机翼为平板翼，迎角为 α，那么上下翼面斜率 $\tau_c(r,s)\approx-\alpha$，源强度为常数分布，上翼面 $-2u_\infty\alpha$，下翼面 $2u_\infty\alpha$。

对于单侧亚声速前缘($m_0<1$)或者单侧缘(锥形流坐标 $t=0$)情况：

如果翼面上任意点前马赫锥的两条直线中一条与超声速前缘相交，另一条与亚声速前缘相交或者侧缘(所有侧缘均为亚声速)相交，称为单亚声速前缘或单侧缘情况，如图6.15所示，这时在积分区域内包括非物面的扰动区——T 区。

在厚度问题中，根据流动关于 $y=0$ 的对称特征，把 T 区想像成与来流平行的无厚度平板翼 $y_u=y_t=y_l=0$，推断出点源强度为零，对扰动势没有贡献；但是弯度问题中，上下机翼流动不再对称，在 T 区产生扰动也不同，无法再利用点源强度为零的条件处理的积分区域。根据前面对于弯度问题线化边界条件讨论，在扰动 T 区中不包含从后缘脱出自由涡面的那一部分区域(T_1 区)内满足：$v_x=\partial\varphi/\partial x=0$，小扰动速度势在空间连续，在 $y=0$ 平面从未扰动 R 区进入扰动 T_1 区，小扰动速度势保持不变，根据定义在未扰动 R 区 $\varphi=0$，因此在扰动区 T_1 内所有点上有 $\varphi=0$，利用这一结论对单侧亚声速前缘的弯度问题进行处理。

机翼平面确定以后，超声速前缘的曲线方程为已知：$s=F_1(r)$或 $r=G_1(s)$，超声速前缘与 $P(x,0,z)$点前马赫锥的交点为$[r_P,F_1(r_P)]$；同样单亚声速前缘或单侧缘的曲线方程也已知：$s=F_2(r)$或 $r=G_2(s)$，前缘或侧缘与 $P(x,0,y)$点前马赫锥的交点为$[G_2(s_P),s_P]$；从$[G_2(s_P),s_P]$点出发平行于 s 轴的直线 $r=G_2(s_P)$称为该点马赫反射线。

点 $P(x,0,y)$的前马赫线在 $y=0$ 平面为两条直线，其中一条与单侧缘相交以后形成的反射线把扰动速势积分区域划分为如图6.15示意的三个区域。假设 T 区内的点源强度为 $2u_\infty\cdot\tau'_u(r,s)$，位于上翼面 $P(x,0,y)$点的小扰动速势：

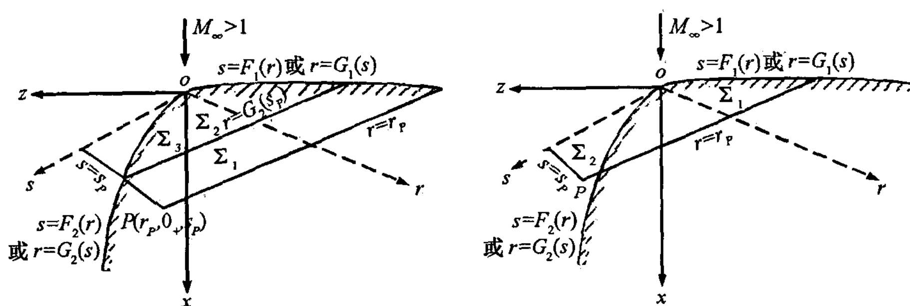


图 6.15　单侧缘情况和弯度问题的抵消法

$$\begin{aligned}\varphi(x,0_+,z) = &-\frac{u_\infty}{2\pi B}\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{\tau_u(r,s)}{\sqrt{(r_P-r)(s_P-s)}}\mathrm{d}r\mathrm{d}s\\ &-\frac{u_\infty}{2\pi B}\iint\limits_{\Sigma_2}\frac{\tau_u(r,s)}{\sqrt{(r_P-r)(s_P-s)}}\mathrm{d}r\mathrm{d}s\\ &-\frac{u_\infty}{2\pi B}\iint\limits_{\Sigma_3}\frac{\tau'_u(r,s)}{\sqrt{(r_P-r)(s_P-s)}}\mathrm{d}r\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{6.53}$$

积分式中各项可以写为：

$$\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{\tau_u(r,s)}{\sqrt{(r_P-r)(s_P-s)}}\mathrm{d}r\mathrm{d}s = \int_{G_2(s_p)}^{r_p}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{(r_P-r)}}\int_{F_1(r)}^{s_p}\frac{\tau_u(r,s)}{\sqrt{(s_p-s)}}\mathrm{d}s$$

$$\iint\limits_{\Sigma_2}\frac{\tau_u(r,s)}{\sqrt{(r_P-r)(s_P-s)}}\mathrm{d}r\mathrm{d}s = \int_0^{G_2(s_p)}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{(r_P-r)}}\int_{F_1(r)}^{F_2(r)}\frac{\tau_u(r,s)}{\sqrt{(s_p-s)}}\mathrm{d}s$$

$$\iint\limits_{\Sigma_3}\frac{\tau'_u(r,s)}{\sqrt{(r_P-r)(s_P-s)}}\mathrm{d}r\mathrm{d}s = \int_0^{G_2(s_p)}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{(r_P-r)}}\int_{F_2(r)}^{s_p}\frac{\tau'_u(r,s)}{\sqrt{(s_p-s)}}\mathrm{d}s$$

以上积分式(6.53)中后两项之和就是交点$[G_2(s_P),s_P]$的扰动势表达式：

$$\varphi[F(s_P),s_P] = -\frac{u_\infty}{2\pi B}\int_0^{G_2(s_p)}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{(r_P-r)}}\left\{\int_{F_1(r)}^{F_2(r)}\frac{\tau_u(r,s)}{\sqrt{(s_p-s)}}\mathrm{d}s + \int_{F_2(r)}^{s_p}\frac{\tau'_u(r,s)}{\sqrt{(s_p-s)}}\mathrm{d}s\right\}$$

在扰动 T_1 区内所有点上有 $\varphi=0$，交点$[G_2(s_P),s_P]$位于扰动 T_1 区边界上，即有：

$$\int_0^{G_2(s_p)}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{(r_P-r)}}\left\{\int_{F_1(r)}^{F_2(r)}\frac{\tau_u(r,s)}{\sqrt{(s_p-s)}}\mathrm{d}s + \int_{F_2(r)}^{s_p}\frac{\tau'_u(r,s)}{\sqrt{(s_p-s)}}\mathrm{d}s\right\} = 0 \tag{6.54}$$

进一步推出：

$$\int_{F_1(r)}^{F_2(r)}\frac{\tau_u(r,s)}{\sqrt{(s_p-s)}}\mathrm{d}s + \int_{F_2(r)}^{s_p}\frac{\tau'_u(r,s)}{\sqrt{(s_p-s)}}\mathrm{d}s = 0 \tag{6.55}$$

从数学原理上，通过以上积分方程(6.55)可以求出 $\tau'_u(r,s)$，按照前面的厚度问题计算方法可以得到上翼面任一点 $P(x,0,y)$ 的扰动势；实际上直接把以上结果带入扰动势积分公式以后发现，T_1 区(积分区域 Σ_3)分布为 $2u_\infty\cdot\tau'_u(r,s)$ 点源对该点产生扰动，正

好与机翼上 Σ_2 上分布为 $2u_\infty \cdot \tau_u(r,s)$ 点源对该点产生扰动相互抵消，因此不需要求出 $\tau'_u(r,s)$ 就可以得到 $P(x,0,y)$ 的扰动势，即仅对机翼上 Σ_1 积分则可：

$$\begin{aligned}\varphi(x,0_+,z) &= -\frac{u_\infty}{2\pi B}\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{\tau_u(r,s)}{\sqrt{(r_P-r)(s_P-s)}}\mathrm{d}r\mathrm{d}s \\ &= -\frac{u_\infty}{2\pi B}\int_{G_2(s_p)}^{r_P}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{(r_P-r)}}\int_{F_1(r)}^{s_P}\frac{\tau_u(r,s)}{\sqrt{(s_p-s)}}\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{6.56}$$

对于亚声速前缘($m_0<1$)或者侧缘(锥形流坐标 $t=0$)情况。

如果翼面上任意点的前马赫锥与两侧亚声速前缘相交，或者与两侧缘相交，称为双亚声速前缘或双侧缘情况。根据 $P(x,0,y)$ 点与两侧相交以后形成的马赫反射线是否还在继续与机翼表面相交，又进一步细分为两种情况。

对于较大展弦比机翼平面形状，在靠近前缘的部分，$P(x,0,y)$ 点在双亚声速前缘或双侧缘的马赫反射线不在机翼表面相交，如图 6.16(a)示意，这时机翼表面 Σ_3 和扰动 T 区 Σ_2 相互抵消，机翼表面 Σ_5 和扰动 T 区 Σ_4 相互抵消，$P(x,0,y)$ 点扰动势仅对机翼上 Σ_1 积分则可。

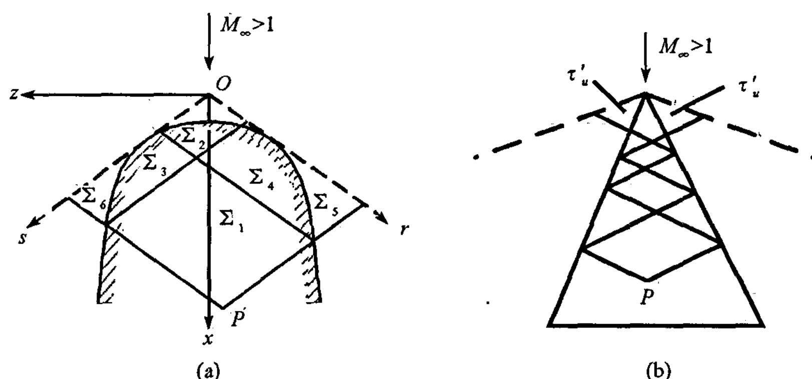


图 6.16 弯度问题的多次抵消法

对于较小展弦比机翼平面形状，$P(x,0,y)$ 点双侧的马赫反射线可能在在机翼表面相交，如图 6.16(a)示意，这时扰动 T 区 Σ_5 同时抵消机翼表面 $\Sigma_2+\Sigma_4$，扰动 T 区 Σ_6 同时抵消机翼表面 $\Sigma_2+\Sigma_3$，机翼表面 Σ_2 被抵消两次，相当于两次考虑 Σ_2 区域内点源的影响，因此在扰动势积分过程中需要减一次 Σ_2，即在 Σ_2 上分布强度为 $-2u_\infty \cdot \tau_u(r,s)$ 的点源，最后得到 $P(x,0,y)$ 点扰动势：

$$\begin{aligned}\varphi(x,0_+,z) = &-\frac{u_\infty}{2\pi B}\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{\tau_u(r,s)}{\sqrt{(r_P-r)(s_p-s)}}\mathrm{d}r\mathrm{d}s \\ &+\frac{u_\infty}{2\pi B}\iint\limits_{\Sigma_2}\frac{\tau_u(r,s)}{\sqrt{(r_P-r)(s_p-s)}}\mathrm{d}r\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{6.57}$$

对于如图 6.16(b)所示意的 $P(x,0,y)$ 点马赫反射线多次反射的情况，根据以上计算方法可以推出，在 $P(x,0,y)$ 点扰动势只需要对图中的 $\Sigma_1,\Sigma_2,\Sigma_3,\Sigma_4$ 区域积分则可，其

中 Σ_2,Σ_4 是在抵消 T 区扰动过程中两次使用，积分时需要减去一次。对于亚声速前缘三角翼在理论上会出现无穷多次马赫反射线的反射，按照以上方法，根据马赫反射线在机翼表面上画出区域以后，依次积分下去，积分区域内的点源强度交替变化正负号，直到积分区域的面积很小时，认为对 $P(x,0,y)$ 点扰动势贡献可以忽略时为止。

$$\varphi(x,0_+,z) = \frac{u_\infty}{2\pi B}\sum_{i=1}^{n}\oiint_{\Sigma_1}\frac{(-1)^i\cdot\tau_u(r,s)}{\sqrt{(r_P-r)(s_p-s)}}\mathrm{d}r\mathrm{d}s \tag{6.58}$$

下面分析两种典型的对于超声速后缘机翼平面形状。

对于如图 6.17 示意，超声速气流以小迎角 α 流过矩形平板机翼。根据自由来流马赫数划分为二维区和三维区，在二维区机翼上下翼面之间相互不影响，可以直接引用翼型的压力系数公式，为：

$$C_{pu}(x,0,z) = -\frac{2\alpha}{B} \text{和} C_{pl}(x,0,z) = \frac{2\alpha}{B}$$

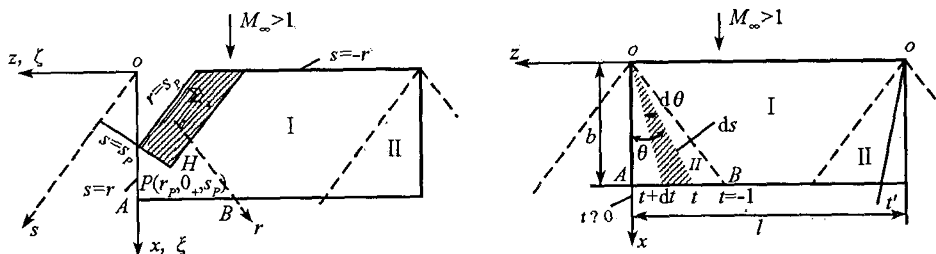


图 6.17　矩形平板机翼的弯度问题求解

在翼尖附近的三维区内 $P(x,0,z)$ 点的前马赫线同时和前缘、侧缘相交，机翼为超声速前缘，扰动势积分需要采用单亚声速前缘或单侧缘情况建立的公式。前缘处 $\xi=0$，推出前缘方程：$s=B\zeta=-r$；左侧缘处 $\zeta=0$，侧缘方程：$s=\xi=r$。

翼面斜率 $\tan\varepsilon\approx\varepsilon=-\alpha$，上翼面源强：$-2u_\infty\alpha$，下翼面源强：$2u_\infty\alpha$，写出上下 $P(x,0,z)$ 翼面点扰动势表达式：

$$\begin{aligned}\varphi(x,0_\pm,z) &= \pm\frac{u_\infty\alpha}{2\pi B}\oiint_{\Sigma_1}\frac{1}{\sqrt{(r_p-r)(s_p-s)}}\mathrm{d}r\mathrm{d}s\\ &= \pm\frac{u_\infty\alpha}{\pi B}\left\{\sqrt{2s_p(r_p-s_p)}+\frac{r_p+s_p}{2}\left[\frac{\pi}{2}-\arcsin\left(\frac{3s_p-r_p}{r_p+s_p}\right)\right]\right\}\end{aligned}$$

得到 x 方向扰动速度分量：

$$\begin{aligned}v_x(x,0_\pm,z) &= \frac{\partial\varphi(x,0,z)}{\partial x} = \frac{\partial\varphi(r_p,s_p)}{\partial r_p}+\frac{\partial\varphi(r_p,s_p)}{\partial s_p}\\ &= \pm\frac{u_\infty\alpha}{\pi B}\left[\frac{\pi}{2}-\arcsin\left(\frac{3s_p-r_p}{r_p+s_p}\right)\right]\\ &= \pm\frac{u_\infty\alpha}{\pi B}\left[\frac{\pi}{2}-\arcsin\left(1+\frac{2Bz}{x}\right)\right]\\ &= \pm\frac{u_\infty\alpha}{\pi B}\arcsin\sqrt{\frac{-Bz}{x}}\end{aligned}$$

得到左侧缘附近的三维区内翼面压力系数：

$$C_p(x,0_\pm,z) = -\frac{2}{u_\infty}\frac{\partial\varphi(x,0_\pm,z)}{\partial x} = \mp\frac{4\alpha}{\pi B}\arcsin\sqrt{\frac{-Bz}{x}} \tag{6.59}$$

对应的上下翼面载荷：

$$\Delta C_p(x,0,z) = C_p(x,0_-,z) - C_p(x,0_+,z) = \frac{8\alpha}{\pi B}\arcsin\sqrt{\frac{-Bz}{x}}$$

采用锥形坐标：$t = \frac{B\cdot z}{x}$，整理得到：

$$\Delta C_p(x,0,z) = \frac{8\alpha}{\pi B}\arcsin\sqrt{-t} \tag{6.60}$$

左侧缘附近的三维区产生的升力：$Y_{left} = q_\infty \oiint_{\Sigma_{left}} \Delta C_p(x,0,z)\mathrm{d}\delta$，根据几何关系积分微元 $\mathrm{d}\delta$ 可以写为：

$$\mathrm{d}\delta = \frac{1}{2}b^2\frac{t+\mathrm{d}t}{B} - \frac{1}{2}b^2\frac{t}{B} = \frac{b^2}{2B}\mathrm{d}t \tag{6.61}$$

得到升力：

$$Y_{left} = q_\infty\int_{-1}^{0}\frac{8\alpha}{\pi B}\arcsin\sqrt{-t}\cdot\frac{b^2}{2B}\mathrm{d}t = \frac{q_\infty\cdot\alpha\cdot b^2}{B^2}$$

同样对于右侧缘附近的三维区内翼面压力系数，可以推出：

$$C_p(x,0_\pm,z) = -\frac{2}{u_\infty}\frac{\partial\varphi(x,0_\pm,z)}{\partial x} = \mp\frac{4\alpha}{\pi B}\arcsin\sqrt{-\frac{Bz}{x}} \tag{6.62}$$

得到右侧缘附近的三维区产生的升力：$Y_{right} = Y_{left}$。

记机翼二维区产生的升力为 Y_2，那么总的升力：

$$Y = Y_2 + Y_{left} + Y_{right} = \frac{4q_\infty\cdot\alpha\cdot S_2}{B} + \frac{2q_\infty\cdot\alpha\cdot b^2}{B^2}$$

其中机翼二维区的面积为：$S_2 = (l - \frac{b}{B})b$，由于矩形机翼面积 $S = lb = \lambda\cdot b^2$，可以求出升力系数：

$$C_L = \frac{Y}{q_\infty S} = \frac{4\alpha}{B}\left[1 - \frac{1}{2B\lambda}\right] \tag{6.63}$$

矩形机翼的升力系数随展弦比增大而增大；当 $\lambda\to\infty$ 时，$C_L\to\frac{4\alpha}{B}$，矩形机翼升力系数的极限是翼型的升力系数。

对于如图 6.18 示意，超声速前缘三角平板翼，也可以采用点源法求解，翼面看成翼面斜率 $\tan\varepsilon\approx\varepsilon = -\alpha$ 的机翼厚度问题处理，上下翼面分布源强为：$\mp 2u_\infty\alpha$，根据前面厚度问题推出的尖前缘三角翼超声速前缘压力系数公式：

$$C_{p\pm}(x,0,z) = \mp\frac{2\cdot\alpha\cdot m}{B\sqrt{m^2-1}}\left[1 - \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{1-t^2}{m^2-t^2}}\right] \tag{6.64}$$

在二维区机翼上下翼面之间相互不影响，可以引用无限长斜置翼的压力系数公式，实

际上采用前面厚度问题推出的尖前缘三角翼超声速前缘压力系数公式更为方便，锥坐标 $t=1$ 对应的就是前缘顶点发出的马赫线，压力系数在马赫线上不存在跳跃，因此这两条马赫线上的压力系数也就是二维区翼面压力系数：

$$C_{p\pm}(x,0,z)=\mp\frac{2\cdot\alpha\cdot m}{B\sqrt{m^2-1}}\tag{6.65}$$

机翼二维区的面积为：

$$S_1=2\left[\frac{1}{2}b_0^2\tan\theta_0-\frac{1}{2}b_0^2\tan\mu_\infty\right]=\frac{b_0^2}{B}(m-1)$$

产生的升力：

$$Y_1=\Delta C_p(x,0,z)\cdot S_1\cdot q_\infty=\frac{4\cdot\alpha\cdot m}{B\sqrt{m^2-1}}S_1\cdot q_\infty$$

机翼三维区的面积微元与锥坐标的关系：

$$\mathrm{d}S_2=\frac{1}{2}b_0^2\tan(\theta+\mathrm{d}\theta)-\frac{1}{2}b_0^2\tan\theta=\frac{b_0^2}{2B}\mathrm{d}t$$

机翼三维区产生的升力：

$$\begin{aligned}Y_2&=q_\infty\oiint_{\Sigma_2}\Delta C_p(x,0,z)\mathrm{d}S_1\\&=q_\infty\int_0^1\frac{4\cdot\alpha\cdot m}{B\sqrt{m^2-1}}\left[1-\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{1-t^2}{m^2-t^2}}\right]\frac{b_0^2}{2B}\mathrm{d}t\\&=\frac{4m\cdot\alpha\cdot b_0^2\cdot q_\infty}{B^2}\left(1-\sqrt{\frac{m-1}{m+1}}\right)\end{aligned}$$

求出机翼升力系数：

$$C_L=\frac{Y}{q_\infty\cdot S}=\frac{Y_1+Y_2}{q_\infty\cdot S}=\frac{4m\cdot\alpha\cdot b_0^2}{q_\infty\cdot SB^2}=\frac{4\alpha}{B}\tag{6.66}$$

可见，超声速前缘三角平板翼的升力系数与二维翼型的升力系数相同。

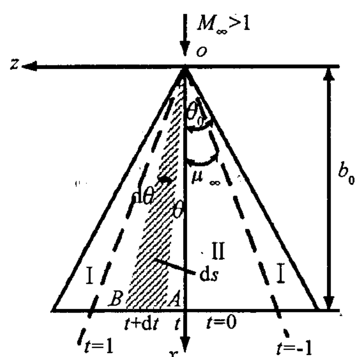


图 6.18　尖前缘三角平板翼的弯度问题求解

原理上，在求出超声速薄翼的压力系数以后，可以得到阻力系数、俯仰力矩系数、压心等特性。在小迎角飞行条件下，工程上常采用如下近似求与升力相关的诱导阻力：

$$C_{Di}=C_L\cdot\tan\alpha \tag{6.67}$$

习　题

6-1　来流马赫数 $M_\infty=2.0$ 薄平板翼型，求迎角为 $\alpha=2°$、$\alpha=5°$和 $\alpha=10°$时，升力系数、阻力系数、相对前缘点力矩系数和相对焦点，并和激波膨胀波理论的结果相比较。

6-2　菱形剖面的薄翼型，最大厚度与弦长之比 $\bar{t}=0.15$，试分别利用线化理论和激波膨胀波理论计算在迎角 $\alpha=0°$和 $\alpha=5°$时，位于 $\bar{x}=0.25$ 和 $\bar{x}=0.75$ 的上下翼面共 4 点的压强系数。

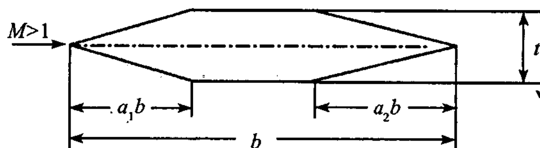
6-3　翼型由抛物线 $4cx^2=b^2(c-y)$和 x 轴围成，计算在飞行马赫数 $M_\infty=\sqrt{2}$、迎角 $\alpha=5.0°$时升力系数 C_L 和阻力系数 C_{xi}。

6-4　试按线化理论计算相对厚度 $\bar{t}=0.1$ 的双圆弧翼型在马赫数 $M_\infty=1.85$、迎角 $\alpha=0°$时压强系数沿弦向的变化。

6-5　证明：按线化理论计算薄平板翼型的环量为 $\Gamma=\dfrac{2b\cdot\alpha\cdot u_\infty}{\sqrt{M_\infty^2-1}}$。

6-6　长度为 $L=2\pi/a$ 的二维波形壁，壁面方程为：$y=\varepsilon\sin ax$，式中 ε 为小量，试用线化理论计算超声速气流经过时壁面压强系数和阻力系数。

6-7　如图所示对称翼型，来流马赫数 $M_\infty>1$



试推导该翼型的厚度波阻表达式，证明相对厚度 $\bar{t}=t/b$ 为定值时，厚度波阻在 $a_1=a_2=0.5$ 时最小。

6-8　无限翼展斜置翼，其后掠角为 $\chi=45°$，翼型为菱形，相对厚度 $\bar{t}=0.1$，试求该机翼在飞行速度 $M_\infty=2.2$、迎角 $\alpha=5.0°$时单位展长的升力系数和波阻系数。

6-9　画出如下三种平板机翼在 $M_\infty=1.5,2.0,2.5$ 的二维区和三维区，确定机翼前后缘的性质：

(1)$\lambda=4$、$\chi_0=45°$、$\chi_1=30°$；

(2)$\lambda=4$、$\eta=1$、$\chi_{0.25}=30°$；

(3)三角翼 $\chi_0=45°$。

6-10　展弦比 $\lambda=4$ 矩形机翼，计算该机翼飞行马赫数 $M_\infty=1.6,2.0,2.4,2.8,3.2$ 时的升力线斜率 C_L^α，并作图。

6-11　展弦比 $\lambda=5$ 矩形机翼，翼剖面为菱形(半楔角 ε)，求飞行速度 $M_\infty=2.0$、迎角 $\alpha=0°$时翼面上二维区内任一点的扰动速度位和压强系数，并写出机翼翼尖三维区内

任一点的扰动速度位的积分表达式。

6-12　展弦比 $\lambda=4$ 三角切尖形平板机翼根据三角翼距翼尖 10% 翼展切尖而得，飞行速度 $M_\infty=2.0$、迎角 $\alpha=2°$时，试计算距根弦 20% 翼展和 40% 翼展处沿弦向的载荷系数表达式；并画出分布图。

第七章　跨声速流动中机翼气动力变化趋势

§7.1　临界压力系数与临界马赫数

当气流流过机翼表面时，上表面凸起的地方，由于流管收缩，局部流速必然加快，引起当地温度降低、声速减小，这样，随着来流速度的增大，该点的流速和声速逐渐接近。当来流速度增大到某一速度时，机翼表面最低压力点处的气流速度等于该点的声速，此时的来流速度叫临界速度，用 u_{cr} 表示；此时的来流马赫数叫临界马赫数，用 M_{cr} 表示；参数 M_{cr} 的大小，可用来说明机翼上表面出现局部超声速气流时机的早晚，也可作为机翼空气动力特性即将发生显著变化的标志。M_{cr} 与机翼平面形状、翼型剖面和来流迎角等参数有关。

达到 M_{cr} 时机翼表面最低压力点称为临界压力，用 p_{cr} 表示，相对应的压力系数称为临界马赫数 M_{pcr}。根据等熵流动临界马赫数 M_{cr} 和临界压力 p_{cr} 之间的关系：

$$\frac{p_{cr}}{p_\infty}=\left(\frac{1+\dfrac{\gamma-1}{2}M_{cr}^2}{\dfrac{\gamma+1}{2}}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{7.1}$$

可以建立临界压力系数与临界马赫数的关系：

$$C_{pcr}=\frac{2}{\gamma M_{cr}^2}\left(\frac{p_{cr}}{p_\infty}-1\right)=\frac{2}{\gamma M_{cr}^2}\left\{\left(\frac{2}{\gamma+1}+\frac{\gamma-1}{\gamma+1}M_{cr}^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}-1\right\} \tag{7.2}$$

对于给定翼型，如果已知不可压流动中最小压力系数 $(C_p)_0$，可以根据普兰特—葛劳握法则得到临界压力系数：

$$C_{pcr}=\frac{(C_p)_0}{\beta}=\frac{(C_p)_0}{\sqrt{1-M_{cr}^2}} \tag{7.3}$$

将(7.3) 式代入 (7.2) 式，可以求出临界马赫数 M_{cr}。

普兰特—葛劳握法则在低亚声速下还较准确，到高亚声速与实验数据的差别较大。1939 年钱学森提出了一个新的压缩性修正公式，这就是著名的卡门—钱学森公式，简称卡—钱公式：

$$C_{pcr}=\frac{(C_p)_0}{\beta+0.5(1-\beta)(C_p)_0} \tag{7.4}$$

不可压流动中翼型厚度和迎角增大，最小压力系数 $(C_p)_0$ 更小，随着来流马赫数增大

更易于达到临界压力系数，因此翼型相对厚度越大临界马赫数 M_{cr} 越小。

根据前面章节分析，在线化理论成立的条件下，无限翼展斜置机翼与前缘平行的切向速度对气动力特性没有影响，采用在翼面上出现与前缘垂直的法向马赫数 $M_n=1$ 所对应的来流马赫数 M_∞ 来定义无限翼展斜置机翼临界马赫数。实际上是按照垂直于前缘的法向马赫数 $M_{\infty n}$ 流过翼型来求马赫数临界 M_{cr}。由于压力系数采用 u_∞ 来定义，因此无限翼展斜置机翼临界压力系数与临界马赫数的关系：

$$C_{pcr}=\frac{2}{\gamma M_{cr}^2}\left\{\left(\frac{2}{\gamma+1}+\frac{\gamma-1}{\gamma+1}M_{cr}^2\cos^2\chi\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}-1\right\} \tag{7.5}$$

可以看出，如果临界压力系数确定以后，增大机翼后掠角，可以提高临界马赫数 M_{cr}；因此现代军机多采用后掠角翼布局。

第四章中给出无粘、定常、等熵、无旋、小扰动 $|v_x|,|v_y|,|v_z|\ll u_\infty$ 假设条件下，跨声速小扰动速度势方程：

$$(1-M_\infty^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=M_\infty^2(\gamma+1)\frac{v_x}{u_\infty}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \tag{7.6}$$

跨声速流场是既有亚声速区又有超声速区流场，从前面推导的小扰动速势方程看，亚声速小扰动速度势方程是椭圆型的，超声速小扰动速度势方程是双曲型的，都是线性方程，跨声速流动小扰动速度势方程是非线性混合型的，而且与气体常数相关，从而使方程求解相当困难；跨声速流场即使在小迎角飞行条件下也存在局部激波，激波和附面层的相互干扰也常常使粘性的影响相当显著；所以在部件空气动力学理论中至今跨声速机翼气动力依然是没有很好的预测方法。

下面对跨声速翼型和机翼气动力特性及其流动机理进行定性分析。

§7.2　跨声速流动中翼型绕流特征及其气动力变化趋势

如图 7.1 所示是二维翼型跨声速绕流，在上翼面达到临界马赫数以后，继续增大自由来流的马赫数，在声速点下游，由于翼型表面的连续外凸，流管扩张，空气膨胀加速，出现超声速区；在超声速区，继续加速膨胀，压力系数进一步下降；在翼型后缘处，如果下翼面是亚声速流动，基本上恢复到自由来流的压力系数比上翼面经过超声速膨胀的压力系数大，如果下翼面也是超声速流动，在后缘处产生激波，也比上游的压力大；当超声速气流由低压区冲入高压区时，就会产生激波，并稳定在气流速度等于激波传播速度的位置上，气流通过局部激波后，即变为亚声速气流向后流去。由于该激波是局部超声速气流引起的，故名局部激波。此时，翼型周围既有亚声速气流，又有超声速气流，还有局部激波，是一种复杂的混合流场。

图 7.2 是对称翼型、迎角 $\alpha=2°$、层流情况下的升力系数随来流马赫数变化曲线，在跨声速流动速度范围存在所谓的“二起二落”变化特征，下面结合翼型绕流图 7.3 解释其流动机理。

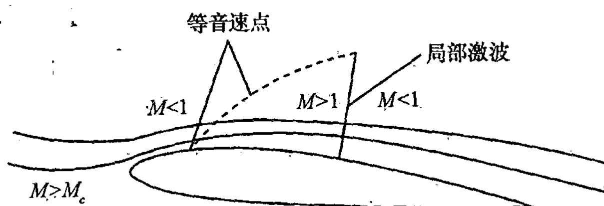


图 7.1 翼型跨声速绕流和局部激波的产生

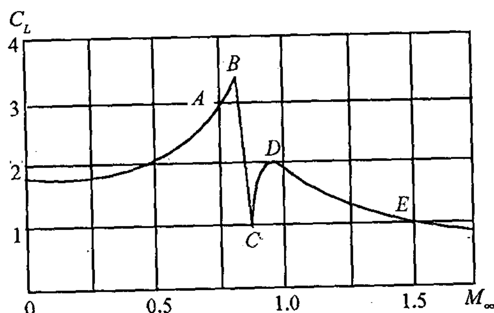


图 7.2 翼型升力系数随来流马赫数变化

根据普兰特—葛劳握法则，随着来流马赫数 M_∞ 增加，升力系数按照 $1/\beta$ 的比例关系逐步增加。当增大到临界马赫数 $M_{cr}\approx 0.75$ 时，只在上表面有很小的超声速区，尚未形成明显的局部激波(图 a)；如果继续增大 M_∞ 就形成局部激波，而且随着 M_∞ 进一步增大，上下表面各点的气流速度加快，声速点前移，局部激波后移，超声速区域面积扩大、区域内速度增大，当局部激波移到某一位置时，局部气流速度等于激波的传播速度，则激波又稳定在此位置上(图 b)；这一过程中，正迎角使得翼型上表面与下表面相比，局部超声速区出现早、区域面积大、压力系数小，导致升力系数迅速增加(大于 $1/\beta$)，出现图 7.2 从 A 点到 B 点的变化规律。

M_∞ 由 0.81 增至 0.89 过程中(图 c)，因为正迎角对称翼型的下表面最低压力点较靠后、下表面流管变化较小、气流膨胀加速较上表面平缓，下表面的局部激波产生以后，随 M_∞ 变化更敏感，在翼型的下表面的局部激波迅速移至后缘，使得下表面超声速区迅速增大，向下的吸力增强；同时上表面附面层分离以后形成激波失速，使尾部上翼面压力较高，综合效果导致升力系数迅速减小(从 B 点到 C 点)。

M_∞ 继续增大至 0.98 以后(图 d)，翼前缘出现头部脱体正激波，随着进一步增大，脱体正激波逐步变为斜激波，强度减弱，波后气体为亚声速流动，导致升力系数有所恢复(从 C 点至 D 点)。

$M_\infty>1$ 以后继续增大，头部脱体激波再次附体，机翼上下表面全部是超声速流动，跨声速范围到此结束(图 e)，导致升力系数变化规律按照 $1/B$ 超声速流动特性的比例关系逐步减小(从 D 点到 E 点)。

翼型阻力系数随来流马赫数变化如图 7.4 示意。在临界马赫数以前亚声速阶段，阻

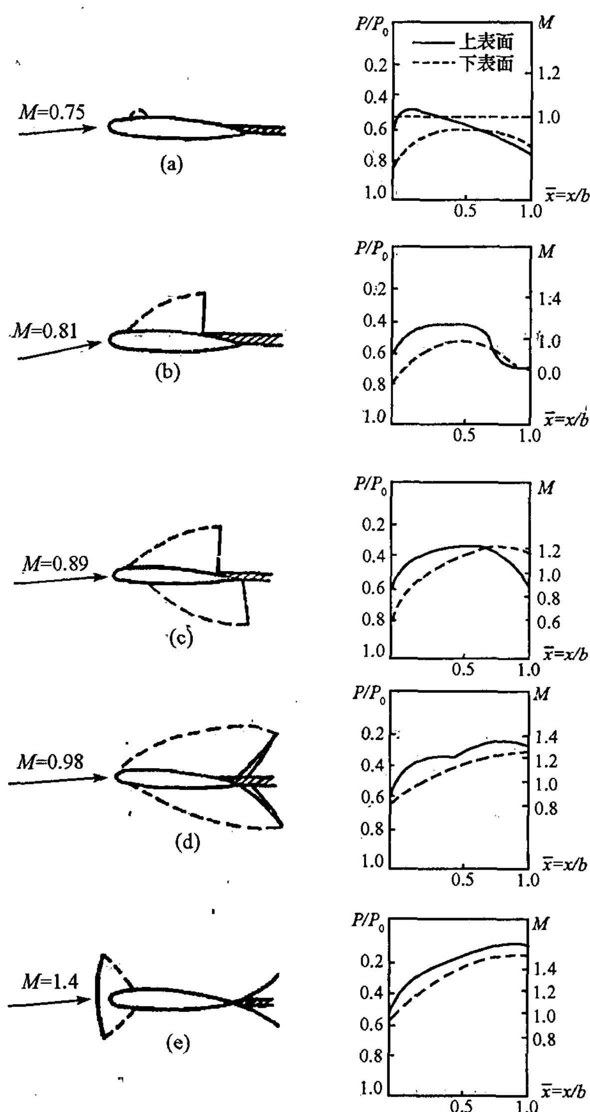


图 7.3　翼型跨声速绕流随来流马赫数变化特征

力系数受压缩性的影响较小，直到接近 M_{cr} 时，随 M_∞ 变化很小；来流 M_∞ 超过 M_{cr} 以后，翼型表面产生局部激波，出现波阻，最初激波并不是很强，而且激波导致的分离不是很严重，阻力系数缓慢增加（图中曲线 *AB* 段所示）；随后来流 M_∞ 增加到一定程度，激波强度增大，激波诱导分离，波阻便急剧增大（图中 *BC* 曲线段）。当 $M_\infty>1$ 以后，激波附体，随 M_∞ 增大，动压增大，致使上下表面压力系数均下降，导致阻力系数下降（图中曲线 *CD* 段）。

在亚声速流中，压力中心几乎不随 M_∞ 而变化；进入跨声速后，由于上翼面出现局部超声速区和激波并向后发展，翼型后半部产生附加升力，压力中心向后移动；以后又由于

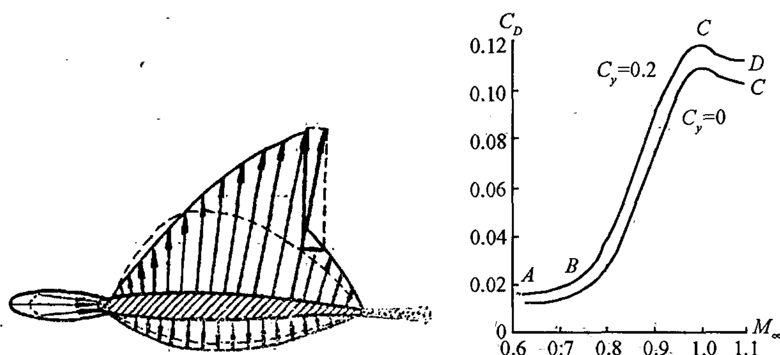


图 7.4 翼型跨声速压力系数分布和阻力系数随来流马赫数变化

下翼面也出现超声速区和激波,并以更快的速度扩展到整个下翼面,使压力中心迅速前移;最后又因为上翼面激波也移动到后缘处,超声速区扩展到整个上翼面,压力中心又向后移动,如图 7.5 示意。

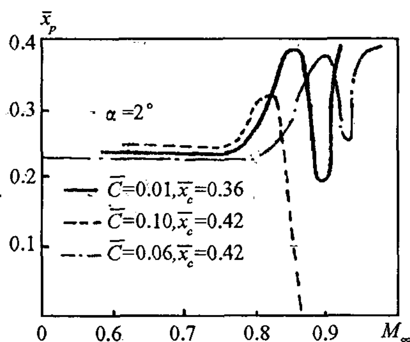


图 7.5 翼型相对压心随来流马赫数变化

§ 7.3 跨声速流动中机翼绕流特征及其气动力变化趋势

研究表明,三维机翼的跨声速特性除与翼型参数有关外,还强烈受平面参数的影响,气动特性随 M_∞ 变化规律因受三维效应的影响而比翼型更为复杂。考虑到翼尖效应和翼根效应的影响,实际应用中常用下面的经验公式估算,直接从翼型的临界马赫数 $(M_{cr})_{\text{II}}$ 得到三维机翼的临界马赫数:

$$(M_{cr})_{\text{III}} = (M_{cr})_{\text{II}} \cdot \frac{2}{1 + \cos\chi_0} \tag{7.7}$$

自由来流 $M_\infty > (M_{cr})_{\text{III}}$ 后,由于后掠翼的翼尖效应,使翼尖附近首先出现局部超声速区和局部激波,激波比较弱,在翼面上的方向几乎与来流垂直,并随 M_∞ 的增大向机翼后缘移动,如图 7.6 左边的子图。

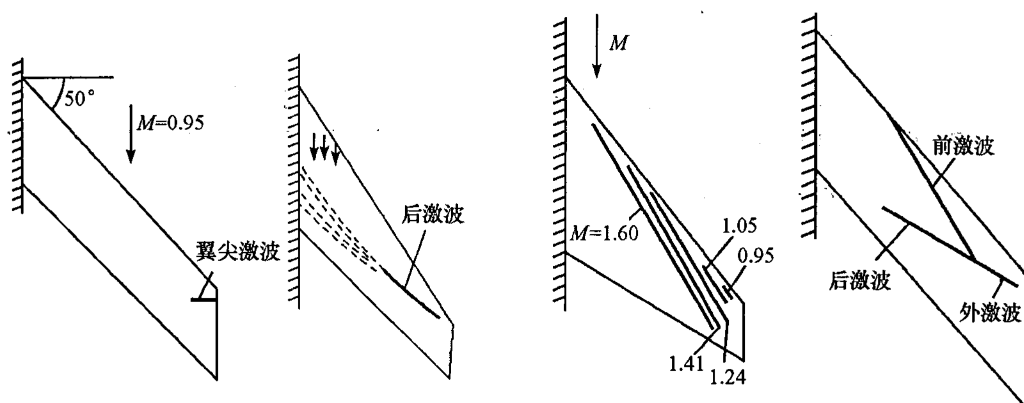


图 7.6　跨声速机翼的翼尖激波、后激波、前激波和外激波的形成

自由来流 M_∞ 继续增大，靠近翼根处向内偏斜的超声速气流受到对称面影响，逐渐向外转折，从而出现一系列较弱的压缩波，这些弱压缩波在机翼某处汇合，在机翼上表面就形成"后激波"。开始形成的后激波一般处于翼尖激波之前；随着自由来流 M_∞ 增大，后激波较翼尖激波向后缘移动快，而会赶上翼尖激波并之合并。与此同时，后激波还向翼根发展，并不断增强其强度。

自由来流 M_∞ 继续增大，在机翼上翼面，从翼尖到翼根相继出现局部超声速区和局部激波，称之为"前激波"。前激波逐渐向机翼内侧和后缘移动，并与后激波相交，在交点外侧形成强度较强的外激波，外激波后翼面上将发生较严重的气流分离。

研究表明，受三维效应的影响，三维机翼的跨声速气动特性主要特点有：

(1)气动系数随 M_∞ 变化剧烈程度因三维效应而弱于翼型情况。

(2)增大后掠角 χ_0，减小展弦比 λ，可以提高机翼临界马赫数，削弱翼面激波强度，减弱附面层干扰，使升力线斜率和压心随 M_∞ 变化幅度变缓，同时波阻下降。

(3)减小翼型厚度可提高机翼临界马赫数，机翼厚度效应也对升力和力矩特性产生相当大的影响，这一点与低速、亚声速及超声速薄翼是完全不同的。

习　题

7－1　解释跨声速流动中薄翼型升力系数随马赫数"两起两落"变化现象所对应的流动机理。

7－2　根据无限翼展斜置机翼临界马赫数和临界压力系数的关系，说明增大机翼后掠角可以提高飞行器的临界马赫数。

7－3　为何翼型相对厚度越大临界马赫数越小。

7－4　来流马赫数 $M_\infty=0.4$ 时，翼型最低压强点的压强系数 $C_{p\min}=-0.782$，试利用普兰特—葛劳握法则，计算该翼型的临界马赫数 M_{cr}。

7-5　某翼型在 $M_\infty = 0.8$ 时，翼型上有一点达到当地声速，问此翼型在低速时最低压强点的压强系数多大？

7-6　已知某翼型的临界马赫数 $M_{cr} = 0.8$，求 $M_\infty = 0.6$ 时的最小压强系数 $C_{p\min}$。

7-7　设某二维机翼的临界马赫数 $M_{cr} = 0.7$，如果该机翼后掠 $\chi = 39°$，变为无限长斜置翼，问这时临界马赫数可提高多少？

第八章　细长旋成体气动力预测方法

飞机或导弹的弹身截面形状一般接近圆形。在理论分析过程中，为了数学模型处理方便，经常假设为一条曲线沿体轴回转而成的旋成体。习惯采用轴线与体轴重合的柱坐标系(r,θ,x)，它与直角坐标关系为：$r=\sqrt{y^2+z^2}$，$\tan\theta=z/y$。

描述旋成体主要几何参数：母线 $R_w(x)$，也就是垂直体轴 x 平面与弹身相交形成的圆截面半径，气动力系数常用最大半径 R_{max}对应面积 $S_{max}=\pi R_{max}^2$或者底部半径 R_d 对应面积$S_d=\pi R_d^2$ 作为无量纲参考量。弹身总长 L，一般分为头部 L_{tb}、柱状身部 L_{sb}和尾部 L_{wb}，即有 $L=L_{tb}+L_{sb}+L_{wb}$。工程中还经常用到表征弹体细长程度参数，一般有全弹长细比 $\lambda=L/(2R_{max})$、头部长细比 $\lambda_{tb}=L_{tb}/(2R_{max})$和尾部收缩比 $\eta=S_d/S_{max}$。火箭、导弹常用的头部母线方程：

(1)锥形：$R^w(x)=x\tan\delta$，δ 为头部半顶角；

(2)蛋形：

$$\frac{R(x)}{R_{max}}=2(\lambda_{tb}^2+0.25)\left[1-\frac{\lambda_{tb}^2}{0.25+\lambda_{tb}^2}\left(\frac{x}{L_{tb}}-1\right)^2-1\right]+1$$

(3)抛物线：

$$\frac{R(x)}{R_{max}}=\frac{x}{L_{tb}}\left(2-\frac{x}{L_{tb}}\right)$$

(4)卡门形：

$$\frac{R(x)}{R_{max}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\phi-\frac{1}{2}\sin2\phi},\quad \phi=\arccos^{-1}\left(1-\frac{2x}{L_{tb}}\right),\quad \phi\in[0,\pi]$$

(5)哈克形：

$$\frac{R(x)}{R_{max}}=\left[\frac{x}{L_{tb}}\left(2-\frac{x}{L_{tb}}\right)\right]^{\frac{3}{4}}$$

(6)指数形：

$$\frac{R(x)}{R_{max}}=\left(\frac{x}{L_{tb}}\right)^n,\quad n\in[0.5,0.75]$$

细长旋成体绕流特性与二维翼型的绕流特性有一些相似之处，但是由于旋成体是三维的，三维效应使得弹体对流体扰动作用要比二维翼型小许多，这一点可以从流量为 Q 的点源在同样距离产生的法向速度得到很好的理解，在二维流动中 $v_r=Q/(2\pi r)$，在三维流动中 $v_r=Q/(4\pi r^2)$，可以看出扰动沿球面传播过程比柱面情况衰减程度更为强烈。在

前面薄翼理论中,三个方向的扰动速度为同样数量级,对于细长旋成体,轴向扰动速度的数量级比其他两个方向小(证明见本节后面内容)。

图 8.1 是小迎角的情况下,细长旋成体与二维翼型亚声速绕流特征和物面压力系数分布比较;从流线看,翼型没有展向速度,上下面流线汇聚在后缘点,细长旋成体存在周向速度,流线从弹体侧面绕行,可以不汇聚在尾部顶点上。对于压缩性的影响,翼型可以根据 $\beta=\sqrt{1-M_\infty^2}$ 进行修正,细长旋成体除了 β 这一影响因素以外,还与横截面积沿轴线的变化有关。

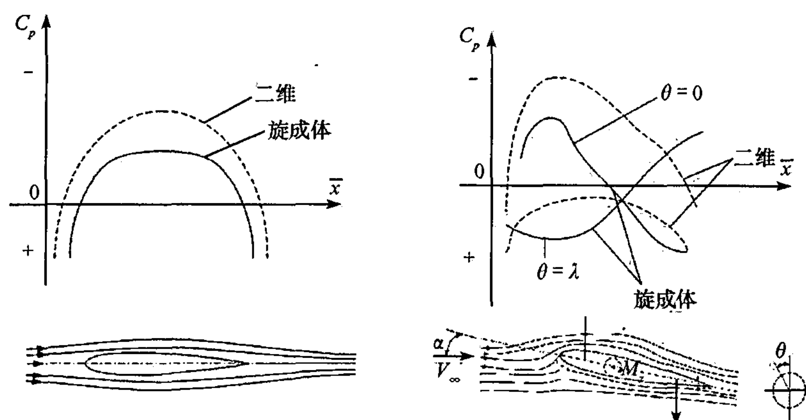


图 8.1　细长旋成体与二维翼型亚声速流动和压力系数分布比较

图 8.2 是 $\alpha=0$ 情况下,截面形状相同的细长旋成体与翼型超声速绕流特征和物面压力系数分布比较。在前体部分,尽管旋成体锥角和二维斜锲角相等,三维激波强度低于二维流动,因此旋成体锥面上压力系数小于翼型斜面上压力系数。膨胀波特性仅仅与气流

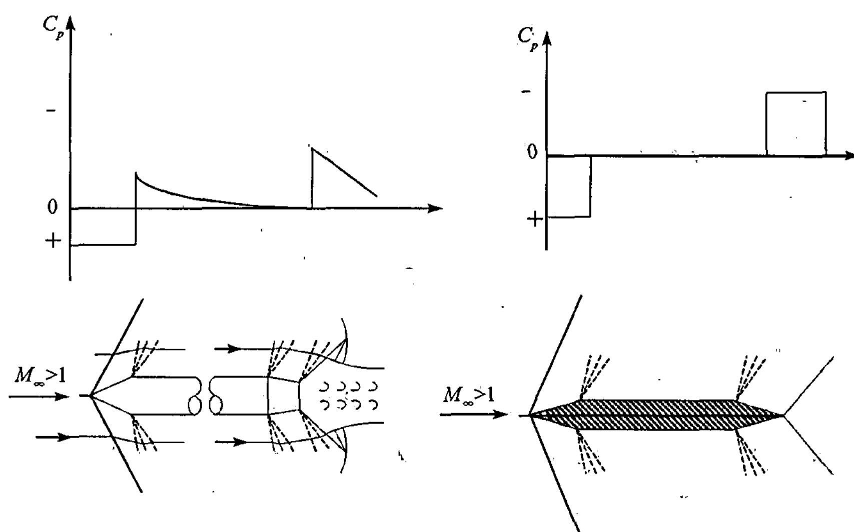


图 8.2　细长旋成体与二维翼型亚声速流动和压力系数分布比较

转角相关,超声速流动经过旋成体与翼型的肩部点压力系数减小幅度一样,在翼型肩部以下平面上压力系数恢复到自由来流参数,并且直到后体保持不变;锥面上压力系数小于自由来流,由于三维效应,圆柱段压力系数逐渐向自由来流参数恢复,需要足够长的圆柱段才能恢复到自由来流参数。

在部件空气动力学部分资料中,介绍弹体气动力预测方法时,对"细长体"描述不够清晰,从下面的推导中可以看出,所谓"细长体"假设在数学形式上有两种描述:首先,小扰动假设$|v_x|,|v_y|,|v_z|\ll u_\infty$,这就要求弹体符合尖头、细长的外形特征;其次,在此基础上进一步简化模型,提出要求:$R_{max}\ll L$,这是流动呈现二维特征。为便于表述,本书中对满足前一种假设的弹体外型称为"细长体",满足后一种要求的称为"极细长体",以示区别。

§8.1 细长旋成体的线化理论

第四章中给出无粘、定常、等熵假设条件下 Euler 方程化为:

$$V[(V\cdot\nabla)V]=a^2(\nabla\cdot V) \tag{8.1}$$

流体声速 $a=\sqrt{\gamma p/\rho}$,流场内速度连续,引入无旋假设 $\nabla\times V=0$,则存在一个称为速度势的标量函数 Φ,柱坐标系下速度矢量 $V=[V_r,V_\theta,V_x]=[\partial\Phi/\partial r,(1/r)\partial\Phi/\partial\theta,\partial\Phi/\partial x]$,上式中各项:

$$\nabla\cdot V=\frac{1}{r}\frac{\partial r\cdot V_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial V_x}{\partial x}$$

$$[(V\cdot\nabla)V]\triangleq\{f_1,f_2,f_3\}$$

利用矢量公式:

$$\begin{aligned}(a\cdot\nabla)b=&e_1\left[a\cdot\nabla b_1+\frac{b_2}{H_2H_2}\left(a_1\frac{\partial H_1}{\partial q_2}-a_2\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\right)+\frac{b_3}{H_3H_1}\left(a_1\frac{\partial H_1}{\partial q_3}-a_3\frac{\partial H_3}{\partial q_1}\right)\right]\\&+e_2\left[a\cdot\nabla b_2+\frac{b_3}{H_2H_3}\left(a_2\frac{\partial H_2}{\partial q_3}-a_3\frac{\partial H_3}{\partial q_2}\right)+\frac{b_1}{H_1H_2}\left(a_2\frac{\partial H_2}{\partial q_1}-a_1\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\right)\right]\\&+e_3\left[a\cdot\nabla b_3+\frac{b_1}{H_3H_1}\left(a_3\frac{\partial H_3}{\partial q_1}-a_1\frac{\partial H_1}{\partial q_3}\right)+\frac{b_2}{H_2H_3}\left(a_3\frac{\partial H_3}{\partial q_2}-a_2\frac{\partial H_2}{\partial q_3}\right)\right]\end{aligned}$$

拉梅系数 $H_1=1,H_2=r,H_3=1$,得到以上矢量中各元素的表达式:

$$f_1=V_r\frac{\partial V_r}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_r}{\partial\theta}+V_x\frac{\partial V_r}{\partial x}-\frac{V_\theta^2}{r}$$

$$f_2=V_r\frac{\partial V_\theta}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}+V_x\frac{\partial V_\theta}{\partial x}-\frac{V_rV_\theta}{r}$$

$$f_3=V_r\frac{\partial V_x}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_x}{\partial\theta}+V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}$$

代入式(8.1)后,形式可表示为:

$$V_r^2\frac{\partial V_r}{\partial r}+\frac{V_rV_\theta}{r}\frac{\partial V_r}{\partial\theta}+V_xV_r\frac{\partial V_r}{\partial x}+V_rV_\theta\frac{\partial V_\theta}{\partial r}+\frac{V_\theta^2}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}+V_\theta V_x\frac{\partial V_\theta}{\partial x}$$

$$V_rV_x\frac{\partial V_x}{\partial r}+\frac{V_\theta V_x}{r}\frac{\partial V_x}{\partial\theta}+V_x^2\frac{\partial V_x}{\partial x}=\left(\frac{\partial V_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{V_r}{r}\right)a^2$$

整理得到柱坐标系下全速度势方程：

$$(a^2-V_r^2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+(a^2-V_\theta^2)\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}+(a^2-V_x^2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}$$
$$-2V_rV_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial\theta}-2V_rV_x\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial x}-2V_\theta V_x\frac{1}{r}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta\partial x}+\frac{V_r}{r}(a^2+V_\theta^2)=0 \tag{8.2}$$

引入扰动速度势：$\Phi=\Phi_\infty+\varphi$，扰动速度：

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}_\infty+\boldsymbol{v}=[V_{\infty r}+v_r,V_{\infty\theta}+v_\theta,V_{\infty x}+v_x]$$

推出如下关系：

$$V_r^2=V_{\infty r}^2+2v_rV_{\infty r}+v_r^2$$
$$V_\theta^2=V_{\infty\theta}^2+2v_\theta V_{\infty\theta}+v_\theta^2$$
$$V_x^2=V_{\infty x}^2+2v_xV_{\infty x}+v_x^2$$
$$V_xV_r=V_{\infty x}V_{\infty r}+V_{\infty x}v_r+V_{\infty r}v_x+v_rv_x$$
$$V_rV_\theta=V_{\infty r}V_{\infty\theta}+V_{\infty r}v_\theta+V_{\infty\theta}v_r+v_rv_\theta$$
$$V_\theta V_A=V_{\infty\theta}V_{\infty x}+V_{\infty x}v_\theta+V_{\infty\theta}v_x+v_\theta v_x$$

等熵流动当地流体声速与自由来流之间，满足：

$$\frac{1}{\gamma-1}a^2+\frac{1}{2}|V|^2=\frac{1}{\gamma-1}a_\infty^2+\frac{1}{2}u_\infty^2$$

$$a^2=a_\infty^2-\frac{\gamma-1}{2}(|\boldsymbol{V}|^2-|\boldsymbol{V}|_\infty^2)$$
$$=a_\infty^2-\frac{\gamma-1}{2}(2v_xV_{\infty x}+2v_rV_{\infty r}+2v_\theta V_{\infty\theta}+v_r^2+v_\theta^2+v_x^2)$$

弹体采用柱坐标系，x 轴与体轴系的体轴重合，自由来流速度分解为：

$$\boldsymbol{V}_\infty=[V_{\infty r},V_{\infty\theta},V_{\infty x}]=[u_\infty\sin\alpha\cos\theta,-u_\infty\sin\alpha\sin\theta,u_\infty\cos\alpha]$$

对于小迎角情况下，近似为：

$$\boldsymbol{V}_\infty\approx[u_\infty\alpha\cos\theta,-u_\infty\alpha\sin\theta,u_\infty]$$

对应的速度势：

$$\Phi_\infty=u_\infty x+r\cdot u_\infty\cdot\alpha\cos\theta \tag{8.3}$$

如果旋成体弹身顶点是尖头的，头部驻点区的影响范围非常小；旋成体母线没有大的波折，任意点斜率很小；任意截面半径与旋成体轴线长度相比很小。符合这些要求的细长旋成体引起的扰动与自由来流相比是个小量：

$$|v_x|,|v_y|,|v_z|\ll u_\infty$$

假设飞行马赫数既不是高超声速又不接近声速，即量级$|1-M_\infty^2|=O(1)$。

根据以上假设整理全速度势方程(8.2)，省掉包括扰动速度和小迎角在内的高阶小量，得到：

$$(a_\infty^2-u_\infty^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+a_\infty^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+a_\infty^2\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}+a_\infty^2\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}=0 \tag{8.4}$$

两侧同时除以自由来流声速 a_∞^2，得到柱坐标系下线化的小扰动速度势方程：

$$(1-M_\infty^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}=0 \tag{8.5}$$

对应的亚声速和超声速流动，上式习惯上写成：

$$\beta^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}=0 \quad (\beta^2=1-M_\infty^2)$$

$$B^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}=0 \quad (B^2=M_\infty^2-1)$$

按照前面的方法，小扰动速度势方程的边界条件也分为未扰动 R 区、扰动 T 区和物体表面 S 区。在亚声速流动中，R 区是数学上的无穷远，扰动 T 区是从物体表面到无穷远的区域；在超声速流动中，顶点出发的马赫锥之前的区域为 R 区，马赫锥之后的区域为 T 区。

在未扰动 R 区：$\varphi=0$。

物面边界条件：

$$\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}=(V_r\cdot n_r,V_\theta\cdot n_\theta,V_x\cdot n_x)=0 \tag{8.6}$$

如果已知母线方程：$r=R_w(x)$，记为 $F(r,x)=r-R_w(x)=0$，物面法线可以求出：$\boldsymbol{n}=\nabla F/|\nabla F|$，在柱坐标系下：

$$\nabla F=\frac{\partial F}{\partial r}j_r+\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial\theta}j_\theta+\frac{\partial F}{\partial x}j_x=\left(1,0,-\frac{\mathrm{d}R_w(x)}{\mathrm{d}x}\right)$$

代入得出：$(v_x+V_{\infty x})\dfrac{\mathrm{d}R_w(x)}{\mathrm{d}x}=(V_{\infty r}+v_r)$，在小迎角条件下取近似，整理为：

$$\left(u_\infty+\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{r=R_w}\right)\frac{\mathrm{d}R_w(x)}{\mathrm{d}x}=\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=R_w}+u_\infty\alpha\cos\theta \tag{8.7}$$

在本章后面分析可以证明，在柱坐标系下，扰动速度 v_x 是比 v_r、v_θ 更高阶的小量，上式进一步写为：

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=R_w}+u_\infty\alpha\cos\theta=u_\infty\frac{\mathrm{d}R_w(x)}{\mathrm{d}x} \tag{8.8}$$

至此，边界条件给定，解存在唯一，理论上求出小扰动速度势，通过下面的压力系数就可以求得旋成体气动力特性。对于可压缩流动，压力系数：

$$C_p=\frac{2}{\gamma M_\infty^2}\left\{\left[1+\frac{\gamma-1}{2}M_\infty^2\left(1-\frac{|V|^2}{u_\infty^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right]-1\right\} \tag{8.9}$$

其中：$|V|^2/u_\infty^2=V_r^2/u_\infty^2+V_\theta^2/u_\infty^2+V_x^2/u_\infty^2$，在小迎角下 $V_r=u_\infty\alpha\cos\theta+v_r$ 和 $V_\theta=-u_\infty\alpha\sin\theta+v_\theta$ 本身就是一阶小量；进行 Taylor 展开，分析 V_x 在小扰动条件下的近似情况：

$$\begin{aligned}\frac{V_x^2}{u_\infty^2}&=\frac{V_{\infty x}^2}{u_\infty^2}+\frac{2V_{\infty x}v_x}{u_\infty^2}+\frac{v_x^2}{u_\infty^2}\\&\approx\cos^2\alpha+\frac{2v_x\cos\alpha}{u_\infty}+O(\varepsilon^3)\\&=\left(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^2+\frac{2v_x}{u_\infty}+O(\varepsilon^3)\end{aligned}$$

$$= 1 - \alpha^2 + \frac{2v_x}{u_\infty} + O(\varepsilon^3)$$

代入式(8.9)，得到压力系数近似表达式：

$$C_p = -\frac{2}{u_\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{1}{u_\infty^2}\left[\left(u_\infty \alpha\cos\theta + \frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2 + \left(u_\infty \alpha\sin\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)^2 - \alpha^2 u_\infty^2\right] \quad (8.10)$$

前面讲述亚声速机翼的线化理论时推导过，机翼扰动方程、边界条件和压力系数都是线性的，如果两个机翼外形之间存在 $y_{w1}(x,y) = c \cdot y_{w2}(x,y)$ 的关系，则对应的两个流场内小小扰动速度势之间也有 $\varphi_1(x,y,z) = c \cdot \varphi_2(x,y,z)$，流场内各点的压强系数也有 $C_{p1}(x,y,z) = c \cdot C_{p2}(x,y,z)$ 关系。根据本节弹体线化理论推导过程看，尽管方程是线性的，但是边界条件(8.8) 式和压力系数(8.9) 式是非线性的，不能够在流场任一点进行线性叠加。

§8.1.1　攻角 $\alpha = 0$ 情况下旋成体小扰动速度势方程求解

对于 $\alpha = 0$ 时，称为旋成体轴向流动问题，为便于和下面的横流区别，小扰动速度势采用 φ_1 表示，这时，$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\theta^2} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial\theta} = 0$，小扰动速度势方程为：

$$\left.\begin{aligned} B^2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} = 0 \\ \beta^2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (8.11)$$

物体表面边界条件：

$$\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right|_{r=R_w} = u_\infty\frac{\mathrm{d}R_w(x)}{\mathrm{d}x} \quad (8.12)$$

流场内任一点的压力系数：

$$C_p = -\frac{2}{u_\infty}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} - \frac{1}{u_\infty^2}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right)^2 \quad (8.13)$$

前面的机翼理论已经说明，直接求解小扰动线化方程有困难，采用亚声速分布基元涡、超声速分布源等有限基本解代替机翼对流场的扰动，通过所研究机翼的边界条件确定基本解，使得两个流场在空间的小扰动速度势一致或近似相等，这样间接得到存在机翼的流场，从而求出机翼的气动力特性。对于弹体，也采用这样的研究路线。下面首先介绍小扰动速度势方程的基本解形式。

根据流动图像，弹体除了使自由来流改变方向外，还有“撑开”的作用，符合源的特征。可以证明旋成体的小扰动速度势方程存在基本解：

$$\varphi_1(r,x) = \frac{-Q}{4\pi\sqrt{(x-\xi)^2 - B^2 r^2}} \qquad M_\infty > 1$$

$$\varphi_1(r,x) = \frac{-Q}{2\pi\sqrt{(x-\xi)^2 + \beta^2 r^2}} \qquad M_\infty < 1$$

对应流动是从轴线$(0,\xi)$位置发出、流量为 Q 点源的速度势;前面已经说明,点源和自由来流合成的流场与弹体绕流较为相似。

在轴线$(0,\xi)$位置上分布单位长度强度为$f(\xi)$的源,在空间任一点 $P(r,x)$产生的扰动速度势为:

$$d\varphi_1 = -\frac{1}{2\pi}\frac{f(\xi)d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - B^2 r^2}} \qquad M_\infty > 1$$

$$d\varphi_1 = -\frac{1}{4\pi}\frac{f(\xi)d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \beta^2 r^2}} \qquad M_\infty < 1$$

在亚声速情况下,整个旋成体在空间任一点 $P(r,x)$产生扰动速度势就是以下积分:

$$\varphi_1(r,x) = -\frac{1}{4\pi}\int_0^L \frac{f(\xi)d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \beta^2 r^2}} \qquad M_\infty < 1 \tag{8.14}$$

对超声速情况,仅要考虑点 $P(r,x)$ 依赖区内源的影响,故积分区域改为:

$$\varphi_1(r,x) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{x-Br} \frac{f(\xi)d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - B^2 r^2}} \qquad M_\infty > 1 \tag{8.15}$$

由于源强度 $f(\xi)$ 是待定函数,这里系数 $-\frac{1}{2\pi}$ 和 $-\frac{1}{4\pi}$ 并没有特别意义。

用边界条件来确定源强度分布的函数$f(\xi)$。$M_\infty < 1$ 时,得到:

$$\frac{1}{4\pi}\beta^2 R_w(x)\int_0^L \frac{f(\xi)d\xi}{\sqrt{[(x-\xi)^2 + \beta^2 R_w^2(x)]^{3/2}}} = u_\infty \frac{dR_w(x)}{dx} \tag{8.16}$$

称为亚声速旋成体轴向流动小扰动速度势积分方程,如果旋成体外型 $R_w(x)$已知,可确定源强度 $f(\xi)$,具体解法多用数值积分法迭代求解。根据式(8.14)写出空间任一点 $P(r,x)$小扰动速度势 $\varphi_1(r,x)$的解析式,求出扰动速度计算压力系数 C_P,从而得到亚声速旋成体的气动力。

在亚声速情况下,弹体尾部扰动会影响到上游,根据 D' Alember 疑题,物体在无粘不可压流体中运动时不产生阻力;同时,方程建立过程中假设要求外形是尖头、尖尾的,实际飞行器存在底部羽流区或分离区,所以实际应用中很少采用亚声速旋成体轴向流动积分方程(8.16)预测旋成体的阻力。

$M_\infty > 1$ 时,积分表达式(8.15)中被积函数在积分上限 $\xi \to (x - Br)$时发散,不能直接求解。引入如下中间变量:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x - Br\cdot \text{ch}u \\ u &= \text{arch}\left(\frac{x-\xi}{Br}\right) \end{aligned}\right\} \tag{8.17}$$

双曲函数 $\text{ch}u = (e^u + e^{-u})/2$ 和 $\text{sh}u = (e^u - e^{-u})/2$ 有性质:

$$\text{sh}'u = \text{ch}u, \quad \text{ch}'u = \text{sh}u, \quad \text{ch}^2 u - \text{sh}^2 u = 1$$

所以

$$d\xi = -Br\text{ch}'u du = -Br\text{sh}u du = -Br\sqrt{\text{ch}^2 u - 1}du = -\sqrt{(x-\xi)^2 - B^2 r^2}du$$

代入小扰动速度势的积分表达式(8.15)中,积分下限 $\xi = 0$ 时:$u = \text{arch}(x/Br)$,积分上限 $\xi = x - Br$ 时:$u = \text{arch}(1) = 0$,得到:

$$\varphi_1(x,r) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\operatorname{arch}\left(\frac{x}{Br}\right)} f(x - Br\cdot \operatorname{ch}u)\mathrm{d}u \tag{8.19}$$

由于函数 $I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$ 的导数:

$$I'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x,y)\mathrm{d}x + \beta'(y)f[\beta(y),y] - \alpha'(y)f[\alpha(y),y]$$

因此有:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\operatorname{arch}\left(\frac{x}{Br}\right)} f'(x - Br\cdot\operatorname{ch}u)\cdot(-B\cdot\operatorname{ch}u)\mathrm{d}u \\ &\quad - \frac{1}{2\pi}\left[\operatorname{arch}\left(\frac{x}{Br}\right)\right]'_r\cdot f[x - Br\cdot\operatorname{ch}u]\Big|_{u=\operatorname{arch}\left(\frac{x}{Br}\right)}\end{aligned} \tag{8.20}$$

根据超声速流动特征,在 $x = 0$ 处不可能布点源,否则导致流动反向,因此有:

$$f\left[x - Br\operatorname{ch}\left(\operatorname{arch}\frac{x}{Br}\right)\right] = f(0) = 0$$

而且有:

$$\operatorname{arch}\left(\frac{x}{Br}\right)\Big|'_r = \frac{1}{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{Br}\right)}\cdot\frac{-x}{Br^2} \neq \infty$$

代入(8.20)式,整理得到:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\operatorname{arch}\left(\frac{x}{Br}\right)} f'(x - Br\cdot\operatorname{ch}u)\cdot B\cdot\operatorname{ch}u\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{x-Br}\frac{f'(\xi)(x-\xi)}{r\sqrt{(x-\xi)^2 - B^2r^2}}\mathrm{d}\xi\end{aligned} \tag{8.21}$$

在物体表面满足边界条件:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\Big|_{r=R_w(x)} &= \frac{1}{2\pi\cdot R_w(x)}\int_0^{x-B\cdot R_w(x)}\frac{f'(\xi)(x-\xi)}{\sqrt{(x-\xi)^2 - B^2\cdot R_w^2(x)}}\mathrm{d}\xi \\ &= u_\infty\frac{\mathrm{d}R_w(x)}{\mathrm{d}x}\end{aligned} \tag{8.22}$$

称为超声速旋成体轴向流动小扰动速度势积分方程。

外形和源强度 $f'(\xi)$ 是一一对应的,理论上,$R_w(x)$ 已知,可求出源强度 $f'(\xi)$,但实际上十分困难。下面分析一个特例,如果已知源强度 $f(\xi) = 2\pi a\xi$,看超声速情况下对应什么样的物体。代入式(8.21)求小扰动速度势的导数:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} &= \int_0^{\operatorname{arch}\left(\frac{x}{B\cdot r}\right)} a\cdot B\cdot\operatorname{ch}u\mathrm{d}u \\ &= a\cdot B\sqrt{\operatorname{ch}u - 1}\Big|_0^{\operatorname{arch}\left(\frac{x}{Br}\right)} \\ &= a\cdot B\sqrt{\left(\frac{x}{B\cdot r}\right)^2 - 1}\end{aligned}$$

代入超声速旋成体轴向流动积分方程,得到:

$$\frac{a}{u_\infty}\sqrt{\left(\frac{x}{R_w(x)}\right)^2 - B^2} = \frac{\mathrm{d}R_w(x)}{\mathrm{d}x}$$

显然 $R_w(x)/x = \tan\delta$ 取为常数是积分方程的解，这时源强度 $f(\xi) = 2\pi a\xi$ 中常数

$$a = \frac{u_\infty \tan\delta}{\sqrt{\cot^2\delta - B^2}} \tag{8.23}$$

因此强度线性分布源对应的流动是锥形流。反之，如果已知锥形的半锥角 δ、来流马赫数和速度以后，就可以确定线性分布源强度中的常数。

根据小扰动速度势积分表达式(8.19)求出流场内任一点扰动速度的轴向分量：

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = -\int_0^{\mathrm{arch}\left(\frac{x}{Br}\right)} a\cdot \mathrm{d}u - \frac{1}{2\pi}\left[\mathrm{arch}\left(\frac{x}{Br}\right)\right]_x' \cdot f(0) = -a\cdot \mathrm{arch}\left(\frac{x}{Br}\right)$$

在物体表面：

$$\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right|_{r=R} = -a\cdot\mathrm{arch}\left(\frac{x}{B\cdot r}\right) = -a\cdot\mathrm{arch}\left(\frac{\cot\delta}{B}\right) \tag{8.24}$$

物体表面的压力系数：

$$\begin{aligned} C_p &= -\frac{2v_x}{u_\infty} - \frac{1}{u_\infty^2}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right)^2 \\ &= \frac{2a}{u_\infty}\mathrm{arch}\left(\frac{x}{B\cdot R_w}\right) - \left(\frac{a\cdot B}{u_\infty}\right)^2\left[\left(\frac{x}{B\cdot R_w}\right)^2 - 1\right] \\ &= \frac{2a}{u_\infty}\mathrm{arch}\left(\frac{\cot\delta}{B}\right) - \left(\frac{a}{u_\infty}\right)^2\left[\cot^2\delta - B^2\right] \end{aligned} \tag{8.25}$$

注意到扰动速度分量 v_x、v_r 和压力系数仅与 $x/(Br)$ 有关，这是锥形流特征。假设锥形 δ 角是一阶小量，下面对物体表面扰动速度分量 v_x 和 v_r 的量级进行简单分析：

$$\frac{v_r|_{R_w}}{u_\infty} = \frac{\mathrm{d}R_w(x)}{\mathrm{d}x} = \tan\delta \sim \delta \text{ 是一阶小量}$$

$$\frac{a}{u_\infty} = \frac{\tan\delta}{\sqrt{\cot^2\delta - B^2}} \sim \tan\delta \sim \delta^2 \text{ 是二阶小量}$$

$$\frac{v_x|_{R_w}}{u_\infty} = -\frac{a}{u_\infty}\mathrm{arch}\left(\frac{\cot\delta}{B}\right) \sim \frac{\mathrm{arch}\left(\frac{1}{\delta}\right)}{\frac{1}{\delta^2}}$$

采用 L'Hospital 法则：

$$\frac{v_x|_{R_w}}{u_\infty} \sim \frac{\frac{1}{\mathrm{sh}\left(\frac{1}{\delta}\right)}\cdot\frac{1}{\delta^2}}{\frac{1}{\delta^3}} \sim \frac{\delta}{\mathrm{sh}\left(\frac{1}{\delta}\right)} \sim \frac{2}{\frac{1}{\delta^2}\mathrm{ch}\left(\frac{1}{\delta}\right)} \ll \delta^2$$

故物体表面 v_x 比 v_r 是高阶小量。同时也可以看出，对于翼型和机翼，物体表面的压力系数与当地斜率之间：$C_p \sim \delta$，对于旋成体则有：$C_p \sim \delta^2$，说明线化理论也能反映三维时扰动变弱的物理现象，确有一定指导意义。

例 8.1 已知 $M_\infty=2.5,\delta=5°$细长锥，$\alpha=0$；计算锥斜面上的压力系数。

解：锥形对应的源强度线性分布：$f(\xi)=2\pi a\xi$，计算参数：

$$B=\sqrt{2.5^2-1}=2.29,\quad \tan5°=0.087$$

$$\frac{a}{u_\infty}=\frac{\tan\delta}{\sqrt{\cot^2\delta-B^2}}=0.007769$$

锥斜面上的压力系数：

$$C_p=\frac{2a}{u_\infty}\mathrm{arch}\left(\frac{\cot\delta}{B}\right)-\left(\frac{a}{u_\infty}\right)^2[\cot^2\delta-B^2]=0.028\,124$$

例 8.2 有一个半锥角 $\delta=5°$、底部直径 $D=10\mathrm{cm}$ 的圆锥形弹头，在海平面以 $M_\infty=1.5$ 速度飞行，试根据小扰动理论计算弹头的零升阻力系数 C_{D0}，如果不计摩擦阻力影响，并设底部压力 $p_d=0.5p_\infty$，估算需要的发动机推力。

解：$B=\sqrt{1.5^2-1}=1.118$

$$\frac{a}{u_\infty}=\frac{\tan\delta}{\sqrt{\cot^2\delta-B^2}}=0.007605$$

得到锥斜面上的压力系数：

$$C_p=0.038\,4$$

阻力系数：

$$C_{D0}=\frac{1}{D_d}\int_0^L C_p2\pi R_w(x)\frac{\mathrm{d}R_w(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=\frac{1}{S_d}\int_0^{S_d}C_p\mathrm{d}S=C_p$$

弹体阻力：

$$\begin{aligned}F_x&=C_{D0}\cdot S_d\cdot q_\infty+(p_\infty-q_d)\cdot S_d\\&=(0.0384\times0.5\times1.225\times1.5^2\times340^2+0.5\times1.013\times10^5)\frac{\pi}{4}0.1^2\\&=(6117.6+50650)\times0.00785\\&=445.63\mathrm{N}\end{aligned}$$

这就是需要的发动机推力。

§8.1.2 攻角 $\alpha\neq0$ 情况下旋成体小扰动速度势方程求解

前面薄翼小扰动绕流问题可以分解为无穷远速度为 u_∞、无迎角、厚度分布为 $2y_t(x,z)$的对称机翼绕流问题（所谓厚度问题），和无穷远速度为 u_∞、迎角 α、无厚度的曲面 $y_c(x,z)$的绕流问题（所谓弯度问题），$\varphi=\varphi_c+\varphi_t$。薄翼小扰动流场的压力系数也可分别由其相应的厚度问题和弯度问题的压力系数叠加而得。对于旋成体流动，尽管方程也是线性的，但是由于旋成体轴线不能弯曲，且边界条件和压力系数具有非线性特征，不可以按照以上机翼的方法进行流场叠加。

现在考察 $\alpha\neq0$ 情况下，旋成体小扰动速度势 φ 减去 $\alpha=0$ 情况下小扰动速度势 φ_1 以后，剩下的扰动速度势 $\varphi_2=\varphi-\varphi_1$ 需要满足：

$$\beta^2\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}=0\qquad(\beta^2=1-M_\infty^2)$$

$$B^2\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial r^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial\theta^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}=0\qquad(B^2=M_\infty^2-1)$$

下面考察小扰动速度势 φ_2 的边界条件：

$$\left.\begin{aligned}&\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=R_w}+u_\infty\alpha\cos\theta=u_\infty\frac{\mathrm{d}R_w(x)}{\mathrm{d}x}\\&\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right|_{r=R_w}+u_\infty\frac{\mathrm{d}R_w(x)}{\mathrm{d}x}\end{aligned}\right\}\tag{8.26}$$

得到小扰动速度势 φ_2 满足的边界条件：

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=R_w}=-u_\infty\alpha\cos\theta\tag{8.27}$$

对应的边界条件正好相当于以自由来流速度 $u_\infty\alpha$ 的横向流过旋成体需要满足的边界条件。这样一来，在柱坐标系下，$\alpha\neq0$ 有迎角的旋成体绕流分解为 x 方向无穷远速度为 u_∞、无迎角的轴向流问题，和 $\theta=-\frac{\pi}{2}$方向无穷远速度为 $u_\infty\alpha$“横向流”问题，如图 8.3 所示。值得指出的是，旋成体小扰动速度势方程假设条件 $|v_x|,|v_y|,|v_z|\ll u_\infty$ 中体现自由来流方向与 x 轴较为接近，所以扰动速度势 φ_2 表示迎角从零变为非零引起的速度势增量，并不是单独的横向流产生的速度势。

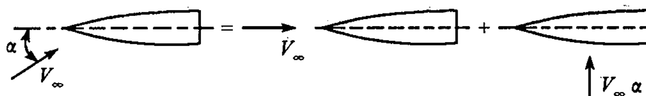


图 8.3　细长旋成体绕流速度势分解示意图

流场内任意点小扰动速度势 φ 压力系数：

$$C_p(\varphi)=-\frac{2}{u_\infty}\frac{\partial(\varphi_1+\varphi_2)}{\partial x}-\frac{1}{u_\infty^2}\left[u_\infty\alpha\cos\theta+\frac{\partial(\varphi_1+\varphi_2)}{\partial r}\right]^2$$
$$-\frac{1}{u_\infty^2}\left[u_\infty\alpha\cos\theta-\frac{1}{r}+\frac{\partial(\varphi_1+\varphi_2)}{\partial\theta}\right]^2+\alpha^2\tag{8.28}$$

可以看出，表达式中关于轴向流扰动速度势 φ_1 和横向流扰动速度势 φ_2 都是非线性的，不能够在流场任一点进行线性叠加，但是在旋成体物体表面上，有：

$$\left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right|_{r=R_w}=-u_\infty\alpha\cos\theta\ \text{和}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\theta}=0$$

代入(8.28)式，得到：

$$C_p(\varphi)=-\frac{2}{u_\infty}\left.\frac{\partial(\varphi_1+\varphi_2)}{\partial x}\right|_{R_w}-\frac{1}{u_\infty^2}\left.\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right)^2\right|_{R_w}$$
$$-\frac{1}{u_\infty^2}\left.\left(u_\infty\alpha\sin\theta-\frac{1}{r}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\theta}\right)^2\right|_{R_2}+\alpha^2\tag{8.29}$$

减去轴向流小扰动速度势 φ_1 的压力系数：

$$C_p(\varphi_1) = -\frac{2}{u_\infty}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} - \frac{1}{u_\infty^2}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right)^2 \tag{8.30}$$

得到横向流问题的压力系数：

$$C_p(\varphi_2) = -\frac{2}{u_\infty}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\bigg|_{R_w} - \frac{1}{u_\infty^2}\left[\left(u_\infty \alpha\sin\alpha - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\theta}\right)^2 - \alpha^2 u_\infty^2\right]\bigg|_{R_w} \tag{8.31}$$

注意：流场内压力系数不能分解，但是物面上压力系数可以分解，这是极具重要性的；否则，虽然小扰动速度势可以分解：$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$，边界条件也可以分解，但是，如果 $C_p(\varphi) \neq C_p(\varphi_1) + C_p(\varphi_2)$，还是不能解决我们的有迎角的流动问题。

从 x 轴线上某一位置 $(0,\xi)$ 旋成体横截面看，横向流问题的流动图相当于前面介绍的不可压流动中流过圆柱的流动，当时采用偶极子来描述这样的流动。

考察不可压流动点源和偶极子的解析表达式：

$$\begin{cases} \varphi_f = \dfrac{Q}{2\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \varphi_m = \dfrac{my}{2\pi(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \quad \text{（偶极方向为 } y \text{ 轴负向）} \end{cases}$$

如果函数前面表示强度的系数 $m = -Q$，点源和偶极子之间有一定关系：

$$\varphi_m = \frac{\partial\varphi_f}{\partial\psi} \tag{8.32}$$

受此启发，分析 $\varphi_3 = \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y} = \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial r}\cdot\dfrac{\partial r}{\partial y} + \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\theta}\cdot\dfrac{\partial\theta}{\partial y} = \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial r}\cos\theta$ 对应的情况。因为轴向流小扰动速度势 φ_1 与变量 θ 无关，可以推出有如下关系：

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^2}\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}$$

$$\cos\alpha\,\frac{\partial}{\partial r}\left(B^2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right) = 0$$

$$B^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\cos\theta\right) - \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\cos\theta\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\cos\theta\right) - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\cos\theta\right) = 0$$

即 φ_3 完全满足旋成体小扰动速度势方程。又知：

$$\frac{\partial\varphi_3}{\partial r} = \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial r^2}\cos\theta = \left(B^2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right)\cos\theta$$

前面分析结论知，对于轴向流小扰动速度势 φ_1 物体表面 v_x 比 v_r 是高阶小量，同时旋成体母线沿 x 方向变化很小，因此有：

$$\frac{\partial\varphi_3}{\partial r}\bigg|_{R_w} \approx -\frac{u_\infty}{R_w}\frac{\mathrm{d}R_w(x)}{\mathrm{d}x}\cos\theta \tag{8.33}$$

可以看出，在 x 轴线同一位置的物体表面小扰动速度势 φ_3 对应的边界条件正好相当于以自由来流速度 $(u_\infty/R_e)\mathrm{d}R_w(x)/\mathrm{d}x$ 的横向流过旋成体需要满足的边界条件，与横向流问题小扰动速度势 φ_2 流动相似。同时在两个小扰动速度势的边界条件表达式中不含

有 v_x 相关的量;根据小扰动速度势方程是线性的,可以推断出横向流问题小扰动速度势 $\varphi_2(x,r,\theta)=c(x)\cdot\varphi_3(x,r,\theta)$。由于 φ_3 和 φ_2 之间相差一个与 x 相关的函数,因此偶极子强度不能直接采用源强度的分布函数,需要根据边界条件建立横向流问题小扰动速度势积分方程来确定偶极子强度 $m(\xi)$。

$M_\infty<1$ 时,横向流问题在空间任一点 $P(r,\theta,x)$ 的小扰动速度势:

$$\varphi_2(r,\theta,x)=\frac{\beta^2 r\cos\theta}{4\pi}\int_0^L\frac{m(\xi)\cdot \mathrm{d}\xi}{[(x-\xi)^2+\beta^2 r^2]^{\frac{3}{2}}} \tag{8.34}$$

根据边界条件得到:

$$\frac{\beta^2}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\int_0^L\frac{r\cdot m(\xi)\mathrm{d}\xi}{[(x-\xi)^2+\beta^2 r^2]^{\frac{3}{2}}}\right\}_{R_w}=-u_\infty\alpha \tag{8.35}$$

称为亚声速旋成体横向流动小扰动速度势流积分方程。

$M_\infty>1$ 时,要考虑依赖区影响,区外没有影响,故:

$$\varphi_2(r,\theta,x)=\frac{\cos\theta}{2\pi r}\int_0^{x-Br}\frac{m(\xi)\cdot(x-\xi)\mathrm{d}\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2-B^2r^2}}\qquad M_\infty>1 \tag{8.36}$$

根据边界条件得到:

$$\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\int_0^{x-Br}\frac{m(\xi)\cdot(x-\xi)\mathrm{d}\xi}{r\sqrt{(x-\xi)^2-B^2r^2}}\right\}_{R_w}=-u_\infty\alpha \tag{8.37}$$

称为超声速旋成体横向流动小扰动速度势流积分方程。

如果旋成体外型 $R_w(x)$ 已知,根据以上积分方程可以确定偶极强度 $m(\xi)$。求得轴向流和横向流问题的压力系数,旋成体锥形面上压力系数:

$$C_p(\varphi)=C_p(\varphi_1)+C_p(\varphi_2) \tag{8.38}$$

前面分析了 $M_\infty>1$、$\alpha=0$ 情况下半锥角为 δ 的锥形外形对应的源强度为线性分布,把偶极强度为线性分布 $m(\xi)=b\xi$ 代入超声速旋成体横向流问题积分方程得到参数与半锥角的关系:

$$b=\frac{2\alpha\cdot u_\infty\cdot\tan\delta}{\sqrt{\cot^2\delta-B^2}+B^2\cot\delta\cdot\mathrm{arch}\left(\frac{\cot\delta}{B}\right)}$$

写出横向流问题小扰动速度势产生的扰动速度:

$$\begin{aligned}v_x(r,\theta,x)&=\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\\&=B\cdot\cos\int_0^{\mathrm{arch}\left(\frac{x}{Br}\right)}b\cdot\mathrm{ch}(u)\mathrm{d}u\\&=B\cdot\cos\theta\cdot b\sqrt{\left(\frac{x}{Br}\right)^2-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v_r(r,\theta,x)&=\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\\&=-B^2\cdot\cos\theta\int_0^{\mathrm{arch}\left(\frac{x}{Br}\right)}b\cdot\mathrm{ch}(u)\mathrm{d}u\end{aligned}$$

$$= -B^2 \cdot \cos\theta \cdot b\left[\frac{1}{2}\text{arch}\left(\frac{x}{Br}\right) + \frac{1}{2}\frac{x}{Br}\sqrt{\left(\frac{x}{Br}\right)^2 - 1}\right]$$

$$v_\theta(r,\theta,x) = \frac{\partial\varphi_2}{\partial\theta}$$

$$= -\frac{B \cdot \sin\theta}{r}\int_0^{\text{arch}\left(\frac{x}{Br}\right)} b \cdot [x - Br \cdot \text{ch}u] \cdot \text{ch}^2 u\text{d}u$$

$$= -\frac{B \cdot b \cdot x \cdot \sin\theta}{r} \cdot \left\{\sqrt{\left(\frac{x}{Br}\right)^2 - 1}\right.$$

$$\left. - \frac{B \cdot r}{2x}\left[\text{arch}\left(\frac{x}{Br}\right) + \frac{x}{Br}\sqrt{\left(\frac{x}{Br}\right)^2 - 1}\right]\right\}$$

例 8.3 已知 $M_\infty = 2.0, \delta = 5°$细长锥，长度为 $L = 0.5\text{m}$，计算 $\alpha = 2.5°$飞行条件下 $x = 0.2L, \theta = 0°$和 $\theta = 180°$锥斜面上的压力系数。

解：首先计算轴向流问题的压力系数：

$$B = \sqrt{2.0^2 - 1} = 1.732, \quad \tan5° = 0.087$$

$$\frac{a}{u_\infty} = \frac{\tan\delta}{\sqrt{\cot^2\delta - B^2}} = 0.007656$$

锥斜面上任一点的压力系数相等：

$$C_p(\varphi_1) = \frac{2a}{u_\infty}\text{arch}\left(\frac{\cos\delta}{B}\right) - \left(\frac{a}{u_\infty}\right)^2[\cot^2\delta - B^2] = 0.03240$$

其次，计算横向流问题：

$$b = \frac{2\alpha \cdot u_\infty \cdot \tan\delta}{\sqrt{\cot^2\delta - B^2} + B^2\tan\delta \cdot \text{arch}\left(\frac{\cot\delta}{B}\right)} = 0.000637u_\infty$$

对于细长锥体外形，细长体理论得到的轴向流和横向流问题压力分布公式中与轴向位置无关，这是典型的锥形流特征。

在 $\theta = 0°$和 $\theta = 180°$母线上：

$$v_x(r,\theta,x) = \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} = B \cdot \cos\theta \cdot b\sqrt{\left(\frac{x}{Br}\right)^2 - 1} = 0.00720 \cdot \cos\theta \cdot u_\infty$$

$$v_x(r,0^0,x) = 0.00720 \cdot u_\infty$$

$$v_x(r,180°,x) = -0.00720 \cdot u_\infty$$

$$v_\theta(r,\theta,x) = \frac{\partial\varphi_2}{\partial\theta} = 0$$

得到 $\theta = 0°$对应的压力系数：

$$C_p(\varphi) = C_p(\varphi_1) + C_p(\varphi_2) = 0.0324 - 0.0123 = 0.0201$$

得到 $\theta = 180°$对应的压力系数：

$$C_p(\varphi) = C_p(\varphi_1) + C_p(\varphi_2) = 0.0324 + 0.0163 = 0.0487$$

§8.2　极细长旋成体的线化理论

所谓的“极细长旋成体”是指在前面细长旋成体的假设条件下，再增加半径与长度相比是个小量：$R_w \ll L$，采用数学表示这一条件就是：$R_w \to 0$。在这种情况下对上一节建立的小扰动速度势方程进一步简化，可以得到解析形式表示的压力系数。

§8.2.1　亚声速情况下轴向流问题

在 $R_w \to 0$ 情况下认为从轴线上分布点源流出的流线都是垂直于轴线的，没有沿轴向的传播速度，相当于一个二维点源的流动，根据流量守恒，单位长度源强 $f(\xi)$ 与径向扩张速度的关系：

$$\left.\begin{aligned} f(\xi) &= 2\pi r \cdot v_r \\ v_r &= \frac{f(\xi)}{2\pi r} \end{aligned}\right\} \tag{8.39}$$

代入物体表面的边界条件：

$$\left.\begin{aligned} v_r|_{R_w} &= u_\infty \frac{\mathrm{d}R_w(\xi)}{\mathrm{d}\xi} = \frac{f(\xi)}{2\pi R_w(\xi)} \\ f(\xi) &= u_\infty \frac{\mathrm{d}S_w(\xi)}{\mathrm{d}\xi} \end{aligned}\right\} \tag{8.40}$$

在 $\xi = x$ 点对旋成体的截面积 $S_w = \pi R_w^2$ 的导数进行展开：

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}S_w(\xi)}{\mathrm{d}\xi} &= \left.\frac{\mathrm{d}S_w(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\right|_{\xi=x} + (\xi - x)\left.\frac{\mathrm{d}^2 S_w(\xi)}{\mathrm{d}\xi^2}\right|_{\xi=x} + \frac{1}{2}(\xi - x)^2 \left.\frac{\mathrm{d}^3 S_w(\xi)}{\mathrm{d}\xi^3}\right|_{\xi=x} + \cdots \\ &= S_w^{(1)}(x) + (\xi - x) S_w^{(2)}(x) + \frac{1}{2}(\xi - x)^2 S_w^{(3)}(x) + \cdots \end{aligned}$$

代入亚声速情况下轴向流在空间任一点 $P(r,x)$ 产生的扰动速度势：

$$\begin{aligned} \varphi_1(r,x) = &- \frac{u_\infty \cdot S_w^{(1)}(x)}{4\pi}\int_0^L \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \beta^2 r^2}} \\ &- \frac{u_\infty \cdot S_w^{(2)}(x)}{4\pi}\int_0^L \frac{(\xi - x)\mathrm{d}\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \beta^2 r^2}} \\ &- \frac{u_\infty \cdot S_w^{(3)}(x)}{8\pi}\int_0^L \frac{(\xi - x)^2\mathrm{d}\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \beta^2 r^2}} + \cdots \\ \triangleq &- \frac{u_\infty \cdot S_w^{(1)}(x)}{4\pi} I_1 - \frac{u_\infty \cdot S_w^{(2)}(x)}{4\pi} I_2 - \frac{u_\infty \cdot S_w^{(3)}(x)}{8\pi} I_3 + \cdots \end{aligned}$$

求出积分：

$$I_1 = -\ln \frac{\sqrt{x^2 + \beta^2 r^2} - x}{\sqrt{(L-x)^2 + \beta^2 r^2} + (L-x)}$$

$$I_2 = \sqrt{(x-\xi)^2+\beta^2 r^2}\Big|_0^L$$

$$I_3 = \left\{\frac{\xi - x}{2}\sqrt{(x-\xi)^2+\beta^2 r^2} - \frac{\beta^2 r^2}{2}\ln\left[\sqrt{(\xi-x)^2+\beta^2 r^2}+(\xi-x)\right]\right\}\Big|_0^L$$

代入小扰动速度势方程，根据极细长旋成体条件 $R_w \to 0$，在物体附近也有：$r \to 0$ 或 $\beta r \to 0$，对以上积分进行求极限，得到：

$$\varphi_1(r,x) = -\frac{u_\infty \cdot S_w^{(1)}(x)}{2\pi}\ln\frac{2\sqrt{x(L-x)}}{\beta r} - \frac{u_\infty \cdot S_w^{(2)}(x)}{4\pi}(L-2x) - \frac{u_\infty \cdot S_w^{(3)}(x)}{8\pi}\frac{L^2-2Lx+2x^2}{2} + \cdots$$

整理以后写为两部分：

$$\varphi_1(r,x) = \frac{u_\infty \cdot S_w^{(1)}(x)}{2\pi}\ln r + \varphi_1^*(\beta,x) \tag{8.41}$$

其中：

$$\varphi_1^*(\beta,x) = -\frac{u_\infty \cdot S_w^{(1)}(x)}{4\pi}\ln\frac{4x(L-x)}{\beta^2} - \frac{u_\infty \cdot S_w^{(2)}(x)}{4\pi}(L-2x) - \frac{u_\infty \cdot S_w^{(3)}(x)}{16\pi}(L^2-2Lx+2x^2) + \cdots$$

物体表面的流向扰动速度：

$$v_x(R_w,x) = \frac{u_\infty \cdot S_w^{(2)}(x)}{2\pi}\ln R_w(x) + \frac{\mathrm{d}\varphi_1^*(\beta,x)}{\mathrm{d}x} \tag{8.42}$$

代入轴向流的压力系数公式，得到物体表面的压力系数分布：

$$G_p(\varphi_1)\big|_{R_w} = \left(-\frac{2v_x}{u_\infty} - \frac{v_r^2}{u_\infty^2}\right)_{R_w}$$

$$= -\frac{S_w^{(2)}(x)}{\pi}\ln R_w(x) - \left(\frac{\mathrm{d}R_w(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2 - \frac{2}{u_\infty}\frac{\mathrm{d}\varphi_1^*(\beta,x)}{\mathrm{d}x} \tag{8.43}$$

从(8.41)式可以看出，小扰动速度势与压缩性参数有关的仅仅是函数 $\varphi_1^*(\beta,x)$ 中的第一项，因此不可压与可压流动的物体表面压力系数公式之间存在如下关系：

$$C_p(\varphi_1)\big|_{R_w}^{M_\infty} = C_p(\varphi_1)\big|_{R_w}^{M_\infty=0} - \frac{S_w^{(2)}(x)}{\pi}\ln\beta \tag{8.44}$$

由此可见，压缩性的影响不但与流动自由来流的马赫数 M_∞ 相关，也与当地的面积变化相关，在 $S_w^{(2)}(x)$ 大的地方，马赫数 M_∞ 的影响也大；如果在旋成体圆柱段处，有：$S_w^{(2)}(x) = 0$，这时压缩性没有影响。图 8.4 是抛物线旋成体在不同马赫数 M_∞ 情况下，长细比为 $\lambda = 10$ 的压力系数分布，可以看出同样的 M_∞ 在不同的轴向位置，影响是不同的。

图 8.4 是不可压缩流动中长细比为 $\lambda = 10$ 的抛物线旋成体和椭球体的物体表面压力系数与精确解的比较，可以看出极细长体理论具有一定的精度。

以上极细长体物体表面压力系数分布曲线可以看出，旋成体沿轴向具有对称性，阻力为零；实际上即使旋成体母线没有这种对称性，根据亚声速无粘流的 D'Alember 疑题，物体运动时不产生阻力。因此，亚声速情况下轴向流问题的研究主要是为横向流问题打基

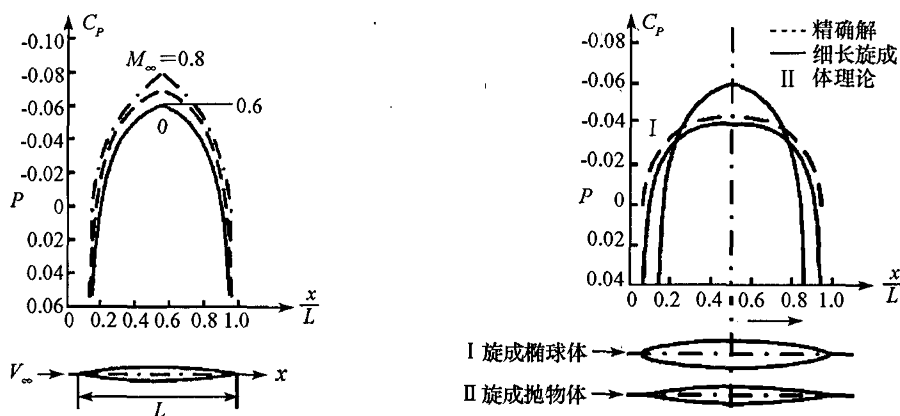


图 8.4　不可压和亚声速轴向流动表面压力系数的比较

础的。

§8.2.2　超声速情况下的轴向流问题

对超声速情况,因为扰动向下游传播,轴向流问题小扰动速度势的积分表达式中积分函数在上限出现奇性,不能采用以上亚声速情况下轴向流问题的分析方法。

首先对细长体的小扰动速度势采用分部积分法:

$$\varphi_1(r,x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{x-Br} f(\xi)\cdot \mathrm{d}\{\ln[\sqrt{(\xi-x)^2-B^2r^2}-(\xi-x)]\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\{f(\xi)\ln[\sqrt{(\xi-x)^2-B^2r^2}-(\xi-x)]\Big|_0^{x-Br}$$

$$-\int_0^{x-Br}\ln[\sqrt{(\xi-x)^2-B^2r^2}-(\xi-x)]\cdot f'(\xi)\mathrm{d}\xi$$

由于 $f(0)=0$,所以有:

$$\varphi_1(r,x) = \frac{f(x-Br)}{2\pi}\ln Br$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{x-Br} f'(\xi)\left\{\ln(x-\xi)+\ln\left[\sqrt{1-\frac{B^2r^2}{(\xi-x)^2}}+1\right]\right\}\mathrm{d}\xi$$

根据极细长旋成体条件 $R_w\to 0$,在物体附近也有 $r\to 0$ 或 $Br\to 0$,对以上积分进行求极限,得到:

$$\varphi_1(r,x) = \frac{f(x)}{2\pi}\ln(Br) - \frac{1}{2\pi}\int_0^x f'(\xi)[\ln(x-\xi)+\ln 2]\mathrm{d}\xi$$

$$= \frac{f(x)}{2\pi}\ln\frac{Br}{2} - \frac{1}{2\pi}\int_0^x f'(\xi)\ln(x-\xi)\mathrm{d}\xi$$

物面附近再采用上一节的假设:

$$\begin{cases} v_r\big|_{R_w} = u_\infty \dfrac{\mathrm{d}R_w(\xi)}{\mathrm{d}\xi} = \dfrac{f(\xi)}{2\pi R_w(\xi)} \\ f(\xi) = u_\infty \dfrac{\mathrm{d}S_w(\xi)}{\mathrm{d}\xi} \end{cases}$$

代入得：

$$\varphi_1(r,x) = -\frac{u_\infty}{2\pi}S_w^{(1)}(x)\ln\frac{2}{Br} - \frac{u_\infty}{2\pi}\int_0^x S_w^{(2)}(\xi)\ln(x-\xi)\mathrm{d}\xi$$

整理为：

$$\varphi_1(r,x) = \frac{u_\infty}{2\pi}S_w^{(1)}(x)\ln r + \varphi_q^*(B,x) \tag{8.45}$$

这里：

$$\varphi_1^*(B,x) = -\frac{u_\infty}{2\pi}S_w^{(1)}(x)\ln\frac{2}{B} - \frac{u_\infty}{2\pi}\int_0^x S_w^{(2)}(\xi)\ln(x-\xi)\mathrm{d}\xi \tag{8.46}$$

物面上流向扰动速度：

$$v_x = -\frac{u_\infty}{2\pi}S_w^{(2)}(x)\ln\frac{2}{Br} - \frac{u_\infty}{2\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x S_w^{(2)}(\xi)\ln(x-\xi)\mathrm{d}\xi \tag{8.47}$$

代入轴向流的压力系数公式，得到物体表面的压力系数分布：

$$C_p(\varphi_1)\big|_{R_w} = \left(-\frac{2v_x}{u_\infty} - \frac{v_r^2}{u_\infty^2}\right)_{R_w}$$

$$= \frac{S_w^{(2)}(x)}{\pi}\ln\frac{2}{B\cdot R_w(x)} + \frac{1}{\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x S_w^{(2)}(\xi)\ln(x-\xi)\mathrm{d}\xi - \left(\frac{\mathrm{d}R_w(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2 \tag{8.48}$$

例 8.4　考虑锥角为 2δ 的细长圆锥的轴向流问题。

解：细长圆锥外形参数为：

$$\frac{\mathrm{d}R_w(x)}{\mathrm{d}x} = \tan\delta \cong \delta, \quad S_w(x) = \pi\delta^2 x^2$$

$$S_w^{(1)}(x) = 2\pi\delta^2 x, \quad S_w^{(2)}(x) = 2\pi\delta^2$$

写出小扰动速度势：

$$\varphi_1(r,x) = -\frac{u_\infty}{2\pi}\cdot 2\pi\delta^2 x\cdot\ln\frac{2}{Br}\cdot - \frac{u_\infty}{2\pi}\int_0^x 2\pi\delta^2\cdot\ln(x-\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$= - u_\infty\delta^2 x\ln\frac{2}{Br} - u_\infty\delta^2\int_0^x\ln(x-\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$= u_\infty\delta^2 x\left(1-\ln\frac{2x}{Br}\right) \tag{8.49}$$

流向扰动速度：

$$v_x = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = -u_\infty\delta^2\ln\frac{2x}{Br}$$

径向扰动速度：

$$v_r = \frac{\partial\varphi_1}{\partial r} = u_\infty\delta^2\frac{x}{r}$$

在圆锥物面上：

$$v_x\big|_R = -u_\infty \delta^2 \ln\frac{2}{B\delta} \text{和} v_x\big|_R = u_\infty \delta$$

在圆锥物面上的压力系数分布：

$$C_p(\varphi_1)\big|_{R_w} = \left(-\frac{2v_x}{u_\infty} - \frac{v_r^2}{u_\infty^2}\right)_{R_w} = 2\delta^2\ln\left(\frac{2}{B\delta}\right) - \delta^2 \tag{8.50}$$

图 8.5 是 $M_\infty = \sqrt{2}$、长细比 $\lambda = 10$ 的抛物线旋成体的物体表面压力系数与特征线方法计算结果的比较，符合较好。从压力系数分布曲线可以看出，旋成体沿轴向具有对称性，但是压力系数不再对称，因此阻力不为零。这时迎角为零，旋成体没有升力，所得阻力称为零升阻力或者波阻。

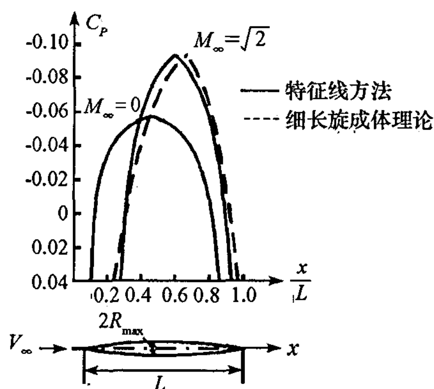


图 8.5　超声速轴向流动表面压力系数的比较

参考面积为 S_{ref}，零升波阻：

$$C_{D0} = \frac{1}{S_{ref}}\int_0^L C_p(x)\cdot \mathrm{d}S_w = \frac{1}{S_{ref}}\int_0^L C_p(x)\cdot S_w^{(1)}(x)\cdot \mathrm{d}x \tag{8.51}$$

物体表面的压力系数(8.48) 代入上式，得到：

$$\begin{aligned} C_{D0} = &\frac{1}{\pi S_{ref}}\int_0^L S_w^{(1)}(x)\cdot S_w^{(2)}(x)\cdot \ln\frac{2}{B\cdot R_w(x)}\mathrm{d}x \\ &+ \frac{1}{\pi\cdot S_{ref}}\int_0^L S_w^{(1)}(x)\cdot\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x S_w^{(2)}(\xi)\ln(x-\xi)\mathrm{d}\xi\right]\cdot \mathrm{d}x \\ &- \frac{1}{S_{ref}}\int_0^L S_w^{(1)}(x)\cdot\left[\frac{\mathrm{d}R_w(x)}{\mathrm{d}x}\right]^2\cdot \mathrm{d}x \\ = &\frac{1}{S_{ref}}(I_1 + I_2 + I_3) \end{aligned} \tag{8.52}$$

采用分部积分法：

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^L \ln\frac{2}{B\cdot R_w(x)}\mathrm{d}[S_w^{(1)}(x)]^2 \\ &= \frac{1}{2\pi}\ln\frac{2}{B\cdot R_w(x)}[S_w^{(1)}(x)]^2\Big|_0^L \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^L[S_w^{(1)}(x)]^2\cdot\frac{1}{R_w(x)}\frac{\mathrm{d}R_w(x)}{\mathrm{d}x}\cdot\mathrm{d}x$$

在尖头处有：$f(0)=u_\infty S_w^{(1)'}(0)=0$，代入整理：

$$I_1=\frac{1}{2\pi}[S_w^{(1)}(L)]^2\cdot\ln\frac{2}{B\cdot R_w(L)}+\int_0^L S_w^{(1)}(x)\cdot\left[\frac{\mathrm{d}R_w(x)}{\mathrm{d}x}\right]^2\cdot\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}I_2&=\frac{1}{\pi}\left[S_w^{(1)}(x)\cdot\int_0^x S_w^{(2)}(\xi)\ln(x-\xi)\mathrm{d}\xi\right]\Bigg|_0^L\\&\quad-\frac{1}{\pi}\int_0^L S_w^{(2)}(x)\cdot\left[\int_0^x S_w^{(2)}(\xi)\ln(x-\xi)\mathrm{d}\xi\right]\cdot\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}S_w^{(1)}(L)\cdot\int_0^L S_w^{(2)}(\xi)\ln(L-\xi)\mathrm{d}\xi\\&\quad-\frac{1}{\pi}\int_0^L S_w^{(2)}(x)\cdot\left[\int_0^x S_w^{(2)}(\xi)\ln(x-\xi)\mathrm{d}\xi\right]\cdot\mathrm{d}x\end{aligned}$$

代入式(8.52)就得到零升波阻。对于尖尾旋成体：$R_w(L)=0$，或者圆柱形尾部，有 $S_w^{(1)}(L)=0$，考虑到被积函数的对称性，零升波阻的表达形式可以进一步简化：

$$C_{D0}=-\frac{1}{2\pi S_{ref}}\int_0^L\int_0^L S_w^{(2)}(x_1)\cdot S_w^{(2)}(x_2)\ln|x_2-x_1|\,\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1$$

继续采用分部积分法：

$$\begin{aligned}C_{D0}&=-\frac{1}{2\pi S_{ref}}S_w^{(1)}(x_1)\cdot\left[\int_0^L S_w^{(2)}(x_2)\cdot\ln|x_1-x_1|\,\mathrm{d}x_2\right]\Bigg|_{x_1=0}^{x_1=L}\\&\quad+\frac{1}{2\pi S_{ref}}\int_0^L S_w^{(1)}(x_1)\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_1}\int_0^L S_w^{(2)}(x_2)\ln|x_1-x_1|\,\mathrm{d}x_2\right]\cdot\mathrm{d}x_1\\&=\frac{1}{2\pi S_{ref}}\int_0^L S_w^{(1)}(x_1)\left[\int_0^L\frac{S_w^{(2)}(x_2)}{x_1-x_2}\mathrm{d}x_2\right]\cdot\mathrm{d}x_1\end{aligned}\tag{8.53}$$

引入变量：

$$x=\frac{L}{2}(1+\cos\sigma)\tag{8.54}$$

显然当 $x=L$ 时 $\sigma=0$，当 $x=0$ 时 $\sigma=\pi$。同时将函数 $S_w^{(1)}(x)$ 展开为三角级数形式：$S_w^{(1)}(x)=L\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin n\sigma$，代入(8.53)式积分部分：

$$\int_0^\pi\left[L\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin n\sigma_1\right]\left[nL\sum_{n=1}^{\infty}A_n\int_0^\pi\frac{2\cos n\sigma_1}{L(\cos\sigma_2-\cos\sigma_1)}\mathrm{d}\sigma_2\right]\cdot\frac{L}{2}\sin\sigma_1\mathrm{d}\sigma_1$$

整理得到旋成体外形满足 $S_w^{(1)}(0)=S_w^{(1)}(L)=0$ 条件的零升波阻：

$$\begin{aligned}C_{D0}&=\frac{1}{2\pi S_{ref}}\int_0^\pi\left(L\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin n\sigma_1\right)\left(nL\sum_{n=1}^{\infty}A_2\frac{\pi\sin n\sigma_1}{\sin\sigma_1}\right)\cdot\sin\sigma_1\mathrm{d}\sigma_1\\&=\frac{L^2}{2S_{ref}}\int_0^\pi\left(\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin n\sigma_1\right)\left(n\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin n\sigma_1\right)\cdot\mathrm{d}\sigma_1\\&=\frac{\pi L^2}{4S_{ref}}\sum_{n=1}^{\infty}nA_n^2\end{aligned}\tag{8.55}$$

如果细长旋成体母线方程已知，则可以求出系数：

$$A_n = \frac{2}{\pi L}\int_0^{\pi} S_w^{(1)}(x) \cdot \sin n\sigma \mathrm{d}\sigma \tag{8.56}$$

可以建立采用变量 σ 表示的细长旋成体截面积的分布：

$$\begin{aligned} S_w(\sigma) &= \int_0^x S_w^{(1)}(\xi)\mathrm{d}\xi \\ &= -\frac{L^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^{\sigma} \sin n\sigma_1 \sin\sigma_1 \mathrm{d}\sigma_1 \\ &= \frac{L^2}{4}\left\{A_1\left(\pi - \sigma + \frac{\sin 2\sigma}{2}\right) + \sum_{n=2}^{\infty} A_n\left[\frac{\sin(n+1)\sigma}{n+1} - \frac{\sin(n-1)\sigma}{n-1}\right]\right\} \end{aligned} \tag{8.57}$$

旋成体尾部 $x = L$ 时 $\sigma = 0$，底部面积：

$$S_w(0) = \frac{L^2 A_1 \pi}{4} \tag{8.58}$$

由此可见，底部面积仅仅与三角级数形式的第一项 A_1 有关，如果面积一定，那么就可以确定：$A_1 = \dfrac{4S_w(L)}{L^2\pi}$，如果 $n \geqslant 2$ 的其他项系数 $A_n = 0$，根据(8.55)式，这时零升波阻最小。

如果底部面积给定，可以求出使得细长旋成体零升波阻最小的截面积分布：

$$S_w(\sigma) = \frac{S_w(L)}{\pi}\left(\pi - \sigma + \frac{\sin 2\sigma}{2}\right) \tag{8.59}$$

称其为 Karman 旋成体。

在已知细长旋成体截面积分布条件下，可以求出旋成体体积：

$$V_0 = \int_0^L S_w(x)\mathrm{d}x = \frac{L}{2}\int_0^{\pi} S_w(\sigma) \cdot \sin\sigma \mathrm{d}\sigma = \frac{\pi L^3}{8}\left(A_1 - \frac{1}{2}A_2\right) \tag{8.60}$$

对于尖头、尖尾的细长旋成体，有 $S_w(0) = S_w(L) = 0$，即第一项 $A_1 = 0$，给定体积以后，$A_2 = -\dfrac{16V_0}{\pi L^3}$，这时如果 $n \geqslant 3$ 的其他项系数 $A_n = 0$，则零升波阻最小，对应的外形截面积的分布：

$$S_w(\sigma) = \frac{4V_0}{\pi L}\left(\sin\sigma - \frac{1}{3}\sin 3\sigma\right) \tag{8.61}$$

称其为 Sears – Hacck 旋成体。

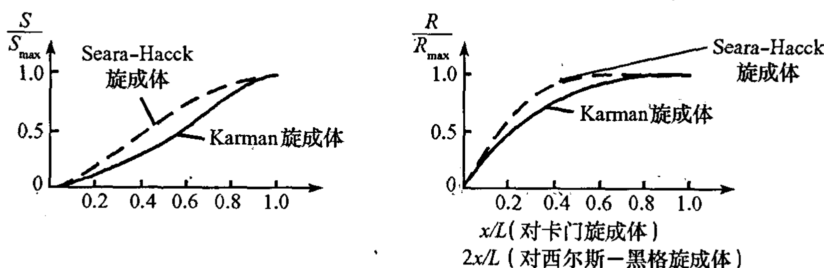


图 8.6　Karman 旋成体和 Sears – Hacck 旋成体的头部母线

§8.2.3 横向流问题(亚声速和超声速情况)

对亚声速情况轴向流问题,小扰动速度势:

$$\varphi_1(r,x)=\frac{u_\infty\cdot S_w^{(1)}(x)}{2\pi}\ln r+\varphi_1^*(\beta,x)$$

对超声速情况下轴向流问题,小扰动速度势:

$$\varphi_1(r,x)=\frac{u_\infty\cdot S_w^{(1)}(x)}{2\pi}\ln r+\varphi_1^*(B,x)$$

轴向流问题小扰动速度势对 r 求导以后,乘以一个仅仅与 x 有关的参数,就得到极细长旋成体横向流问题小扰动速度势:

$$\varphi_2(r,\theta,x)=c(x)\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\cos\theta=c(x)\frac{u_\infty\cdot S_w^{(1)}(x)}{2\pi r}\cos\theta=\frac{u_\infty\cdot m(x)}{2\pi r}\cos\theta \tag{8.62}$$

可以看出,尽管亚声速情况轴向流和超声速情况轴向流问题小扰动速度势不同,但是对应的横向流问题小扰动速度势是一样的,因此对横向流问题不考虑压缩性影响。

代入小扰动速度势线化方程:

$$(1-M_\infty^2)\frac{u_\infty\cdot\cos\theta}{2\pi r}\frac{\mathrm{d}^2m(x)}{\mathrm{d}x^2}+\frac{u_\infty\cdot m(x)\cdot\cos\theta}{2\pi}\frac{2}{r^3}$$
$$-\frac{u_\infty\cdot m(x)\cdot\cos\theta}{2\pi}\frac{1}{r^3}-\frac{u_\infty\cdot m(x)\cdot\cos\theta}{2\pi}\frac{1}{r^3}=0 \tag{8.63}$$

在 $r\to0$ 条件下对方程各项进行量级分析,x 方向导数是 $O(1/r)$ 量级,其余方向导数 $O(1/r^3)$ 是量级,因此可以忽略沿流向变化,这样横向流问题小扰动速度势满足 $r-\theta$ 平面内 Laplace 方程。无论亚声速情况还是超声速情况,横向流问题相当于不可压速势流理论中无穷远速度为 $u_\infty\alpha$ 均匀流和强度为 $m(x)$ 的偶极形成的流场。其中参数 $m(x)$ 根据横向流问题边界条件确定:

$$\left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right|_{R_w}=-\frac{u_\infty\cdot m(x)}{2\pi R_w^2(x)}\cos\theta=-u_\infty\alpha\cos\theta \tag{8.63}$$

得到:$m(x)=2\pi\alpha R_w^2(x)$,代入细长旋成体横向流问题小扰动速度势:

$$\varphi_2(r,\theta,x)=\frac{u_\infty\cdot\alpha\cdot R_w^2(x)}{r}\cos\theta \tag{8.65}$$

代入横向流问题的压力系数表达式:

$$C_p(\varphi_2)=-\frac{2}{u_\infty}\left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right|_{R_w}-\frac{1}{u_\infty^2}\left.\left[\left(u_\infty\alpha\sin\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\theta}\right)^2-\alpha^2u_\infty^2\right]\right|_{R_w} \tag{8.66}$$

又知:

$$\begin{cases}\left.\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right|_{R_w}=wu_\infty\alpha\dfrac{\mathrm{d}R_w(x)}{\mathrm{d}x}\cos\theta\\[2ex]\left.\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial\theta}\right|_{R_w}=-u_\infty\alpha\sin\theta\end{cases}$$

得到：

$$C_p(\varphi_2) = -4\alpha\frac{\mathrm{d}R_w(x)}{\mathrm{d}x}\cos\theta + (1-4\sin^2\theta)\alpha^2 \approx -4\alpha\frac{\mathrm{d}R_w(x)}{\mathrm{d}x}\cos\theta \tag{8.67}$$

考察上式中$(1-4\sin^2\theta)\alpha^2$与前面章节介绍过的均匀来流速度与圆柱形成的二维扰流速度势的表面压力系数，只是把均匀来流速度换为$u_\infty\alpha$。

在求出细长旋成体轴向流问题和横向流问题的压力系数，就可以得到细长旋成体的压力系数：$C_p(\varphi) = C_p(\varphi_1) + C_p(\varphi_2)$。轴向流问题的压力系数沿圆周向积分为零，不产生升力或法向力，横向流问题产生的法向力系数：

$$\begin{aligned}
C_N &= \frac{1}{S_{ref}}\int_0^L\int_0^{2\pi} C_p(\varphi_2)\cdot n_y\mathrm{d}\sigma \\
&= -\frac{1}{S_{ref}}\int_0^L\int_0^{2\pi} C_p(\varphi_2)\cdot R_w(x)\cdot\cos\theta\mathrm{d}x\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{S_{ref}}\int_0^L\int_0^{2\pi} 4\alpha\cos^2\theta\cdot R_w(x)\cdot\frac{\mathrm{d}R_w(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\mathrm{d}\theta + I_2 \\
&= \frac{2\alpha}{S_{ref}}\int_0^L S_w^{(1)}(x)\cdot\mathrm{d}x \\
&= \frac{2\alpha S_w(L)}{S_{ref}}
\end{aligned} \tag{8.68}$$

第二部分积分：

$$I_2 = \frac{1}{S_{ref}}\int_0^L\int_0^{2\pi}(1-4\sin^2\theta)\alpha^2 R_w(x)\cos\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x = 0$$

根据法向力系数(8.68)式可见，对于尖尾旋成体，底部面积$S_w(L) = 0$，在小迎角条件下法向力系数$C_N = 0$，即尖头、尖尾旋成体不产生法向力。如果底部不为零，采用底部面积作为参考面积$S_{ref} = S_w(L)$，则有：

$$C_N = 2\alpha \tag{8.69}$$

根据法向力系数表达式可以求出旋成体单位长度的载荷：

$$\frac{\mathrm{d}\Delta F_N}{\mathrm{d}x} = q_\infty\cdot\int_0^{2\pi} C_p(\varphi_2)\cdot R_w(x)\cdot\cos\theta\mathrm{d}\theta = 2q_\infty\cdot\alpha\cdot S_w^{(1)}(x) \tag{8.70}$$

可以看出，细长旋成体的法向载荷或者法向力主要与母线沿轴线的变化率有关，由于圆柱段上$S_w^{(1)}(x) = 0$，根据以上极细长旋成体理论，是不产生气动载荷的。在亚声速飞行马赫数下，对于小迎角，这一结论与实际情况较为符合，压力和俯仰力矩主要受头部和缩段尾部的影响；但是，在超声速飞行马赫数下，在紧接头部的圆柱段上也要产生法向载荷。

假设俯仰力矩抬头为正，取顶点为力矩参考点：

$$\begin{aligned}
C_{mz} &= -\frac{1}{L\cdot S_{ref}}\int_0^L\int_0^{2\pi} C_p(\varphi_2)\cdot R_w(x)\cdot\cos\theta\cdot x\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x \\
&= -\frac{2\alpha}{L\cdot S_{ref}}\int_0^L S_0^{(1)}(x)\cdot x\mathrm{d}x \\
&= -\frac{2\alpha}{L\cdot S_{ref}}\left[S_w(x)\cdot x\Big|_0^L - \int_0^L S_w(x)\mathrm{d}x\right]
\end{aligned} \tag{8.71}$$

定义横截面的平均面积作为参数：

$$S_{pj} = \frac{1}{L}\int_0^L S(x)\mathrm{d}x$$

如果底部不为零，采用底部面积 $S_{ref} = S_w(L)$ 作为参考面积，则有：

$$C_{mz} = -2\alpha\left[1 - \frac{S_{pj}}{S_w(L)}\right] \tag{8.72}$$

对应的全弹长的压心位置：

$$X_p = -\frac{C_{mz}}{C_N} = \left[1 - \frac{S_{pj}}{S_w(L)}\right] \tag{8.73}$$

对于尖头、尖尾旋成体有：$S_w(0) = S_w(L) = 0$，这时俯仰力矩系数：

$$C_{mz} = \frac{2\alpha S_{pj}}{S_{ref}} \tag{8.74}$$

尖头、尖尾旋成体不产生法向力，但是有与迎角同方向、起不稳定作用的抬头力矩；这时理论上压心位置在无穷远处，力矩绕焦点作用。

小迎角细长旋成体绕流可以分解为轴向流问题和横向流问题。轴向流问题的压力系数具有轴对称特性，不产生法向力，因此求法向力系数和俯仰力矩系数时仅仅涉及到横向流问题压力系数 $C_p(\varphi_2)$；但是对于细长旋成体的轴向力系数，轴向流问题和横向流问题的压力系数都有贡献：$C_p(\varphi) = C_p(\varphi_1) + C_p(\varphi_2)$。

对于 $\alpha = 0$ 的轴向流问题，轴向力就是阻力，在亚声速流动中不产生阻力，在超声速流动中，已经讨论过零升波阻 C_{D0}，下面分析横向流问题对轴向力的贡献：

$$\begin{aligned} C_A &= \frac{1}{S_{ref}}\int_0^L C_p(\varphi_2)\cdot \mathrm{d}S_w \\ &= \frac{1}{S_{ref}}\int_0^L\int_0^{2\pi} C_p(\varphi_2)\cdot R_w(x)\cdot\frac{\mathrm{d}R_w(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{S_{ref}}\int_0^L\int_0^{2\pi}\left[-4\alpha\frac{\mathrm{d}R_w(x)}{\mathrm{d}x}\cos\theta + (1-4\sin^2\theta)\alpha^2\right]\cdot R_w(x)\cdot\frac{\mathrm{d}R_w(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x \end{aligned}$$

对于 $\alpha \neq 0$ 的横向流问题，轴向力系数为：

$$\begin{aligned} C_A &= \frac{1}{2\pi S_{ref}}\int_0^L\int_0^{2\pi}[(1-4\sin^2\theta)\alpha^2]\cdot\mathrm{d}S_w(x)\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\alpha^2}{S_{ref}}[S_w(0) - S_w(L)] \\ &= -\frac{\alpha^2 S_w(L)}{S_{ref}} \end{aligned} \tag{8.75}$$

对于尖头、尖尾旋成体有：$S_w(0) = S_w(L) = 0$，横向流问题对轴向力没有贡献；如果底部不为零，采用底部面积作为参考面积 $S_{ref} = S_w(L)$，则有：

$$C_A = -\alpha^2 \tag{8.76}$$

这样得到小迎角细长旋成体绕流的轴向力系数：

$$C_A = \begin{cases} -\alpha^2 & M_\infty < 1 \\ C_{D0} - \alpha^2 & M_\infty > 1 \end{cases} \tag{8.77}$$

细长旋成体绕流的升力系数和阻力系数：

$$C_L = C_N\cos\alpha - C_A\sin\alpha$$

$$C_D = C_N\sin\alpha + C_A\cos\alpha$$

在小迎角情况下，$\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$和 $\sin\alpha \approx \alpha$，并假设 $C_{D0} \ll 2$，则有：

$$C_L = C_N\cos\alpha - C_A\sin\alpha \approx 2\alpha \tag{8.78}$$

$$C_D = C_N\sin\alpha + C_A\cos\alpha \approx \begin{cases} \alpha^2 & M_\infty < 1 \\ C_{D0} + \alpha^2 & M_\infty > 1 \end{cases} \tag{8.79}$$

习惯上把迎角产生的阻力称为诱导阻力。小迎角细长旋成体在亚声速和超声速流动诱导阻力系数是相同的：

$$C_{Di} = \alpha^2 \tag{8.80}$$

§8.3　极细长旋成体大迎角下的工程估算方法

线化理论预测得到的旋成体压力系数分布与实验结果比较见图 8.7。

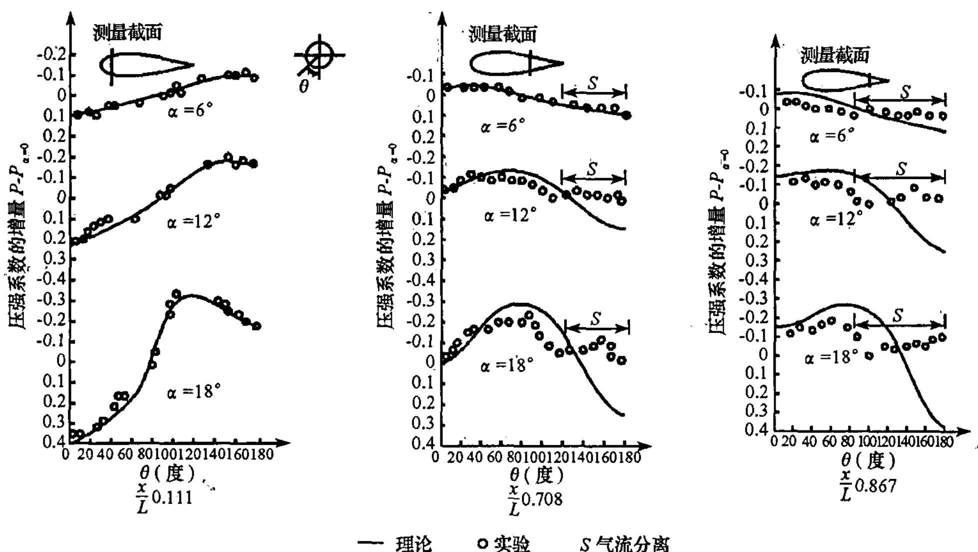


图 8.7　迎角对旋成体压力系数的影响

可以看出，在旋成体尖点附近，线化理论预测值与实验结果符合较好，直到较大迎角 $\alpha = 18°$时才在背风区 $\theta = 18°$附近有些差别。但是在旋成体后部，较小迎角情况下（$\alpha \geqslant 6°$）就出现明显的差异。这主要有两方面的原因，根据线化理论，在从旋成体尖点到最大截面积之前 $S_w^{(1)}(x) > 0$，沿流向产生的是顺压梯度，对横向流动的影响使得最小压强值点的位置比二维圆柱理论最小压强值点 $\theta = 90°$更大，因此流动不易发生纵向和横向分离；在最大截面积之后 $S_w^{(1)}(x) < 0$，沿流向产生的是逆压梯度，对横向流动的影响使得最小压强值

点 $\theta < 90°$，流动易于发生分离。另外一个原因是，在向下游流动的过程中，物体表面的附面层不断增厚，符合位势条件的流场区域远离旋成体附近，线化理论的无粘假设已经不能反映流动的重要因素。

迎角对旋成体气动特性的影响非常复杂，小迎角时旋成体背风区出现的分离涡在横截面上是对称的，从两侧出发的分离面也大致对称；随着迎角增大，分离形态开始发生改变，出现相对稳定的不对称涡系，在无偏航角的情况下也会产生侧向力和偏航力矩；迎角增大到一定程度，涡系开始脱落形成与二维圆柱绕流相似的非定常涡街。

目前，对于大迎角下旋成体气动特性还处于探索研究阶段，没有较为精确的预测理论，下面介绍的横流理论是在极细长旋成体理论指导下建立的一种工程模型。

分析细长旋成体横向流问题的压力系数

$$C_p(\varphi_2) = -4\alpha \frac{\mathrm{d}R_w(x)}{\mathrm{d}x}\cos\theta + (1 - 4\sin^2\theta)\alpha^2 \tag{8.81}$$

第一部分与迎角成线性关系，反映了母线沿轴向变化的三维特性，在大迎角情况下继续保留；第二部分是速度为 $u_\infty \alpha$ 的位势流在二维圆柱产生的压强分布，沿周向积分为零，因此在大迎角情况下未能体现旋成体背风区出现的分离涡，需要根据物理机理进行重新建模；目前常用所谓的“横流理论”。

如果细长旋成体的半径与长度相比是个小量，这是母线沿轴向的变化非常小，采用数学表示就是：$S_w^{(1)}(x) \ll 1$，横流理论假设细长旋成体在处粘性相关的法向力就是以 $S_w(x)$ 为横截面的二维圆柱的阻力，这样一来，旋成体单位长度的载荷：

$$\frac{\mathrm{d}\Delta F_N}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\rho_\infty u_\infty^2 \cdot 2\alpha \cdot S_w^{(1)}(x) + \frac{1}{2}\rho_\infty (u_\infty \alpha)^2 \cdot C_{D2}(x) \cdot 2R_w(x) \tag{8.82}$$

式中 $C_{D2}(x)$ 风洞实验得到的二维圆柱的阻力系数，以圆柱直径 $2R_w(x)$ 作为无量纲参考量。在应用时值得注意的是，如果三维旋成体相关物理量作为参考量，横流速度为 $u_\infty \alpha$，二维圆柱雷诺数和马赫数为：

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Re}_y &= \frac{2R_2(x) \cdot u_\infty \cdot \sin\alpha}{v_\infty} \\ M_{\infty y} &= \frac{u_\infty \cdot \sin\alpha}{a_\infty} \end{aligned}\right\} \tag{8.83}$$

实验研究表明二维圆柱的阻力系数 $C_{D2}(x)$ 与雷诺数、湍流度、物面粗糙度、马赫数相关，图 8.8 是马赫数的影响。在下面估算极细长旋成体大迎角下气动特性时，二维圆柱阻力系数 $C_{D2}(x)$ 作为已知条件使用。

根据旋成体单位长度的载荷分布，可以求出大迎角下旋成体法向力系数：

$$C_N = \frac{2\alpha \cdot S_w(L)}{S_{ref}} + \frac{2\alpha^2 \cdot S_w(L)}{S_{ref}} \int_0^L C_{D2}(x) \cdot R_w(x) \cdot \mathrm{d}x \tag{8.84}$$

尽管是大迎角，但是横流理论中依然认为 $\sin\alpha \approx \alpha$ 和 $\cos\alpha \approx 1$，升力系数：

$$C_L \approx C_N \tag{8.85}$$

假设俯仰力矩抬头为正，取顶点为力矩参考点：

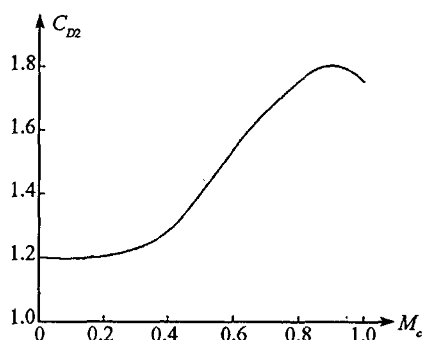


图 8.8　旋成体“横流理论”模型

$$C_{mz} = \frac{1}{L \cdot S_{ref}}\left[2\alpha \cdot [V_0 - L \cdot S_w(L)] - 2\alpha^2 \cdot \int_0^L C_{D2}(x) \cdot R_w(x) \cdot x \cdot \mathrm{d}x\right] \tag{8.86}$$

线化理论预测得到的旋成体压力系数分布与实验结果比较见图 8.9，可见还是较为一致的。

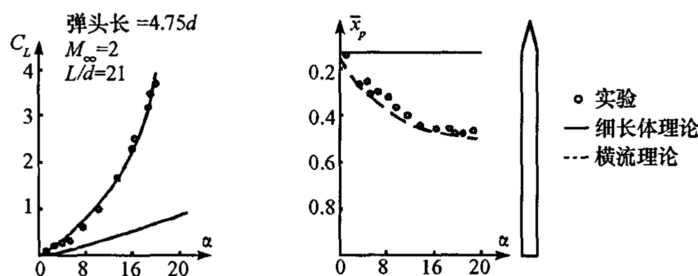


图 8.9　“横流理论”模型计算结果与实验的比较

习　题

8-1　对于不可压缩的细长旋成体绕流，线化速势流方程为$\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}=0$。证明该方程的基本解之一为 $\varphi=\dfrac{c}{\sqrt{x^2+r^2}}$，并写出对应的定解边界条件。

8-2　在来流马赫数 $M_\infty=2.0$ 和迎角 $\alpha=0°$情况下，用线化理论和精确激波理论计算顶角 $\delta=2°,4°,6°,8°,10°$的圆锥体压力系数，作图比较，分析线化理论的适用性。

8-3　已知细长旋成体轴向流问题的小扰动速势 φ_1，证明$\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y}$满足细长旋成体小扰动速势线化方程。

8-4　有长细比分别为 $\lambda=5,8,10,15$ 细长圆锥体，试分别利用细长体理论和极细长

体理论计算在迎角 $\alpha=0°$、$M_\infty=3$ 飞行条件下零升力波阻系数(以底部面积为参考面积),并对计算结果进行分析。

8-5　采用分布线源的方法解决母线方程为 $R_w(x)=0.1x(1-x)$ 的旋成体轴向流问题,求在极细长条件下,不可压缩和亚声速的源强度分布。

8-6　采用分布线源的方法解决母线方程为 $R_w(x)=0.1x(1-x)$ 的旋成体超声速轴向流问题,求在极细长条件下源强度的分布。

8-7　采用分布偶极子的方法解决母线方程为:$R_w(\bar{x})=0.1x(1-x)$ 的旋成体超声速横向流问题,求在极细长条件下偶极子强度分布。

8-8　在来流马赫数 $M_\infty=2.0$,用极细长体理论计算半顶角 $\delta=4°$ 圆锥体的气动力特性随迎角($\alpha=0°,2°,4°,6°,8°$)变化情况下,并作图。

8-9　用极细长体理论计算母线方程为 $R_w(x)=0.1x(1-x)$ 的旋成体,在来流马赫数 $M_\infty=2.0$、迎角 $\alpha=5°$ 的气动力特性。

第九章　非圆截面弹体气动力预测方法

20世纪70年代以前的导弹一般采用圆形截面弹体，而新一代导弹则往往选用非圆截面弹体，如椭圆形、正方形、长方形、六边形和梯形等；非圆截面导弹由于具有良好的隐身特性，高升阻比，适合吸气式导弹布局设计，便于贮存、携带与分离等优点，已成为世界各国研制新型导弹时十分重视发展的方向。

平板在雷达波照射下，具有曲面所没有的特性，即在平板法向偏角±15°的范围内，有很强的镜面散射高峰，而在其余广阔入射角范围内，后向镜面散射变得很弱，其雷达散射截面值（Radar Cross Section，RCS）只有高峰时的百分之几或千分之几。根据平板外形这一雷达波散射特性，如果飞行器外形采用平板组合，使其在重要入射角下避开后向散射峰值，就可使得RCS成数量级降低，达到很好的隐身效果。图9.1给出了长度相同的圆截面弹体和长方形截面弹体侧向RCS的比较，圆截面弹体对所有入射角范围内有恒定RCS，而长方形截面弹体除个别入射角具有较大的RCS外，其他入射角的RCS都比圆截面弹体小得多。

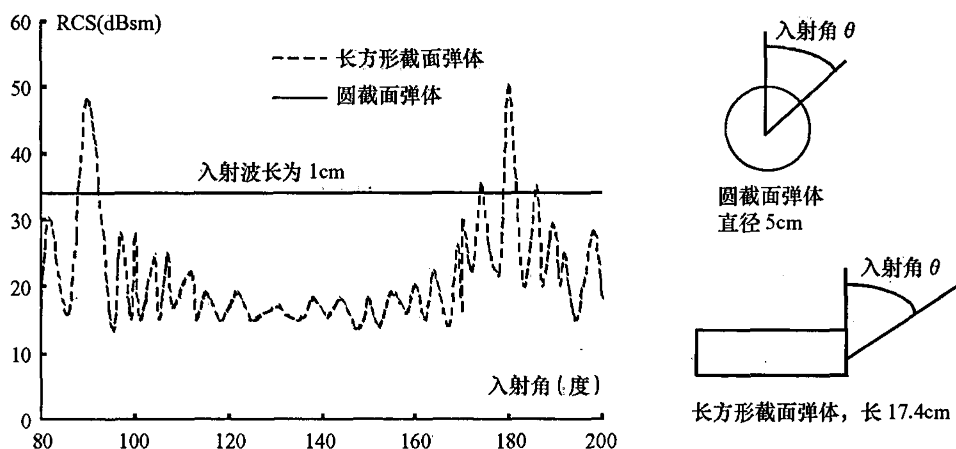


图9.1　长度相同的圆截面弹体和长方形截面弹体的侧向雷达散射截面(RCS)比较[3]

导弹升阻比是衡量导弹气动效率的一项重要指标，高升阻比可以改善导弹巡航和机动性能。宽高比较大的非圆截面弹体和具有相同面积的圆截面弹体相比，具有更高的升阻比；有些非圆截面弹体除了改善升阻比性能外，还可以增大横侧稳定性。例如，采用倾斜转弯控制技术的导弹（BTT）结合非圆截面弹体布局，使导弹具有和飞机一样的布局外形，设计中采用弹体截面垂直尺寸减小的低轮廓弹体（Low Profile Body）和尾翼片的上下反

角减小的低轮廓尾翼(Low Profile Fins)概念,利于增升减阻,可以提高机动性能及射程。

采用正方形或长方形截面弹体,不仅在气动和隐身方面具有良好的特性,而且易于贮存、携带与分离,能够紧凑地排列,不仅能够很好地使用集存贮、运输和发射功能于一体的通用发射箱,而且给燃料、战斗部和导引头留出了更多的空间,并和载机在整体上构成一个高密度、低阻力外形。

非圆截面弹体较圆截面弹体更适合吸气式导弹布局设计。

尽管有以上这些优势,但是非圆截面弹体应用处于探索阶段,其中一个因素是这种布局外形参数增多,气动力变化规律较为复杂,目前气动力特性预测理论还不完善。在前言中提到型号气动力研究手段,并且分析各自优缺点。在总体方案论证和初步设计阶段,设计师期望导弹气动特性预测手段同时具有精确、迅速、花钱少、易于实现的特点。对于圆形截面弹体可以采用上一章介绍的细长旋称体或极细长旋称体理论进行气动力的预测,但是对非圆截面导弹,所有的理论基础气动力理论预测估算方法的研究开展很少,国外型号主要依赖大量地面风洞实验结果基础上建立的数据库。

下面从小扰动细长体理论出发,根据能量、动量和力之间的关系,建立了较为完备的非圆截面导弹气动力特性预测估算方法,通过与国外文献实验结果的比较,该方法在小攻角($\alpha < 15°$)范围具有较好的精度。

§9.1 理论基础

无粘、定常、等熵、无旋条件下,采用小扰动假设$|v_x|, |v_y|, |v_z| \ll u_\infty$,根据量纲分析,得到飞行马赫数$|1 - M_\infty^2| \approx 1$量级小扰动速度势线化方程:

$$(1 - M_\infty^2)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \tag{9.1}$$

给定边界条件,在未扰动区:$\varphi = 0$;在物面边界条件:$\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n} = 0$;为使解唯一还要增加尖头条件。

回顾前面介绍的小迎角下细长旋成体绕流的小扰动速度势理论:首先,方程是线性的,根据叠加原理分解为轴向流问题和横向流问题;其次,细长旋成体轴向流问题和横向流问题的边界条件可以线性叠加;尽管轴向流问题和横向流问题压力系数线性在流场内部不能够线性叠加,但是在物体表面可以叠加,这样分别求出轴向流问题和横向流问题压力系数以后,线性叠加就得到小迎角下细长旋成体的压力系数。

下面可以推导得出,对于符合小扰动假设条件的任意截面弹体,依然可以分解为轴向流问题和横向流问题,但是无法证明压力系数线性叠加以后是原来小迎角下细长旋成体的压力系数。

尽管弹体截面任意形状,但是一般存在对称面和弹体轴,这里取弹体坐标系。给定任意截面弹体物面方程为:$x = f(x, z)$,边界条件 $\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ 化为:

$$u_{\infty x} + v_x\big|_w = (u_{\infty y} + v_y\big|_w)\frac{\partial f}{\partial y} + (u_{\infty z} + v_z\big|_w)\frac{\partial f}{\partial z}$$

根据前面细长旋成体分析，由于三维效应，流向扰动速度是比其他两个方向扰动速度更小的量 $|v_x| \ll |v_r|, |v_\theta|$，认为对于细长的任意截面弹体三维效应依然存在，满足条件 $|v_x| \ll |v_y|, |v_z|$，这样一来，以上边界条件近似写为：

$$u_{\infty x} = (u_{\infty y} + v_y|_w)\frac{\partial f}{\partial y} + (u_{\infty z} + v_z|_w)\frac{\partial f}{\partial z} \tag{9.2}$$

在如图 9.2 所示的弹体坐标系下，小迎角和小侧滑角飞行状态下，无穷远处来流速度可分解为：

$$\left.\begin{aligned} u_{\infty x} &= u_\infty \cos\alpha\cos\beta \approx u_\infty \\ u_{\infty y} &= u_\infty \sin\alpha\cos\beta \approx u_\infty \alpha \\ u_{\infty z} &= u_\infty \sin\beta \approx u_\infty \beta \end{aligned}\right\} \tag{9.3}$$

依然把迎角 $\alpha = 0°$ 和侧滑角 $\beta = 0°$ 称为轴向流问题，这时有 $u_{\infty y} = u_{\infty z} = 0$，对应的小扰动速度势 φ_1，边界条件写为：

$$u_\infty = \left.\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right|_w \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + \left.\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right|_w \cdot \frac{\partial f}{\partial z} \tag{9.4}$$

下面考察迎角 $\alpha \neq 0°$ 和侧滑角 $\beta \neq 0°$ 情况下，把扰动速度势 $\varphi_2 = \varphi - \varphi_1$ 的情况：满足小扰动速度势线化方程(9.1)，在无穷远处 $\varphi_2 = 0$，根据式(9.2)和(9.4)可知，边界条件为：

$$\left(\left.\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right|_w + u_\infty \cdot \alpha\right) \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + \left(\left.\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\right|_w + u_\infty \cdot \beta\right) \cdot \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \tag{9.5}$$

正好是无穷远处来流以 $\boldsymbol{V}_{2\infty} = (0, u_\infty \alpha, u_\infty \beta)$ 流过任意截面弹体满足的物面边界条件，因此证明，在小扰动假设条件下，非圆截面弹体绕流还可以像细长旋成体绕流一样分解为轴向流问题和横向流问题。

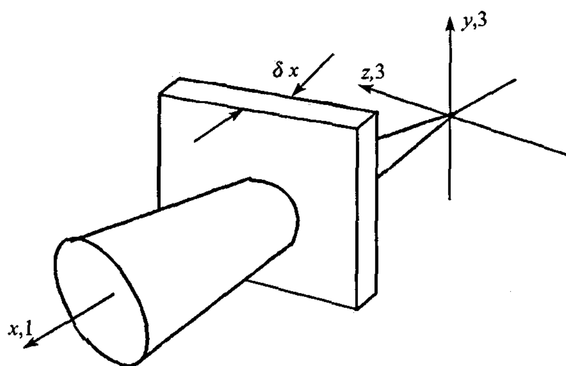


图 9.2　弹体坐标系和控制体示意图

从上一章细长旋成体绕流的小扰动速度势理论建立过程看，尽管非圆截面弹体也可以分解，但是分解以后依然存在如下问题：首先，轴向流问题本身难以采用轴线布置基本解来代替，不可能得到扰动势的通解表达式；其次，横向流问题不能简单的从轴向流问题的扰动势微分求出；第三，非圆截面弹体边界条件没有细长旋成体边界条件那样的关系，求出轴向流问题和横向流问题压力系数线性以后，不能简单叠加处理得到小迎角下任意截面弹体的压力系数。

为解决这些问题，需要建立新的理论模型。

对于非圆截面弹体的轴向流问题完全是三维问题，目前在有限基本解理论范围内除了格子法还没有更合适预测方法，同时考虑到轴向流问题只能提供阻力特性，在本章不做分析。

下面主要讨论横向流问题，为避免引入过多的符号，以下论述中：$\varphi=\varphi_2$，就是横向流问题的扰动势。

回顾上一章极细长旋成体条件下 $R_w\to 0$ 推导出的结论：尽管亚声速情况和超声速情况轴向流问题小扰动速度势方程不同，但是对应的横向流问题小扰动速度势方程是一样的，等价于不可压速势流理论中无穷远速度为 $u_\infty\alpha$ 均匀流和偶极子形成流场，根据边界条件确定了偶极强度 $m(x)$，就得到整个流场的小扰动速度势。细长旋成体理论和极细长旋成体理论的差异在于确定偶极强度 $m(x)$的过程，前者考虑流向不同位置之间的相互作用，需要求解积分方程；后者为 $m(x)=2\pi\alpha R_w^2(x)$仅仅需要知道当地轴向位置的横截面积，与上下游没有关系，本质上确定偶极强度过程退化为 $r-\theta$ 平面内 Laplace 方程求解过程。

对于长细比很大、截面积沿流向变化很小、尖头外形的非圆截面弹体，流向导数变化远远小于其他两个方向导数变化，可以采用类似于极细旋成体 $R_w\to 0$ 的条件，认为其横向流问题可以不考虑压缩性影响，在物体表面附近的区域内，流动具有二维特性，也可以通过求解满足 $y-z$ 平面内的 Laplace 方程得到横向流问题在物面小扰动速度势的导数。

根据能量守恒原理，弹体传给流体的能量与流体对弹体做功相关。考虑弹体在无限大的无粘、理想流体中运动，既没有表面摩擦，也没有分离引起的涡耗散，弹体传给流体的能量全部转换为流体的动能。

在以均匀速度 V_∞ 相对运动的弹体坐标系下，可以写出流场内流体动能表达式：

$$T_{move}=\oiiint_{V_0}\frac{\rho}{2}\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}\mathrm{d}\sigma$$

但是，从理论力学的能量和做功之间的关系来看，在运动坐标系下，由于自由来流速度 u_∞ 在流场各点处不变化，因此这部分速度对应的动能不做功，也不产生气动力。在物体附近，流场受到扰动，速度发生变化，在当地物体和流动之间有能量交换，对物体产生气动力，因此，在分析气动力时仅仅考虑扰动速度引起的流场动能，这部分动能是弹体运动推动流体微团产生的，取地面坐标系较为合适。在静止的大气中，流场所有速度均为弹体运动引起，流场内流体动能表示为：

$$T=\oiiint_{V_0}\frac{\rho}{2}|\boldsymbol{v}'|^2\mathrm{d}\sigma=\oiiint_{V_0}\frac{\rho}{2}\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{v}'\mathrm{d}\sigma \tag{9.6}$$

式中 V_0 是从弹体表面到未扰动区之间围成的空间区域的体积。

能量为标量，与坐标系选取无关，所以弹体坐标系下，弹体运动推动流体微团产生的动能不变，这时流场内速度：$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}_\infty+\boldsymbol{v}'$，但是弹体运动在流场内产生气动力的动能依然采用(9.6)式。

对于存在小扰动速度势不可压流动有：

$$\nabla \cdot (\varphi \boldsymbol{v}') = \boldsymbol{v}' \cdot \nabla \varphi + \varphi \nabla \cdot \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{v}'$$

这里扰动速度 $\boldsymbol{v} = \nabla \varphi = (v_x, v_y, v_z)$。函数 $\varphi \boldsymbol{v}'$ 在积分区域 V_0 内连续，应用高斯定理把扰动速度引起的流场动能表达式的体积分改为围绕区域 V_0 边界的面积积分：

$$T = \frac{\rho}{2} \oiint_{S_\infty} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n_1} \mathrm{d}s - \frac{\rho}{2} \oiint_{S_w} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \mathrm{d}s \tag{9.7}$$

式中 S_w 是弹体表面，$\boldsymbol{n}$ 是弹体表面法向，向外为正（从物面指向流场内部）；S_∞ 是空间区域 V_0 未扰动区的边界（对于亚声速流动为无穷远，对于超声速流动为弹体影响区以外），$\boldsymbol{n}_1$ 是 S_∞ 的法向，从流场向外。根据定义在未扰动区：$\varphi = 0$，因此有：

$$T = -\frac{\rho}{2} \oiint_{S_w} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \mathrm{d}s \tag{9.8}$$

根据线性方程叠加原理，如果无穷远处来流只在方向有单位速度分量时，满足小扰动速度势方程及物面条件的解为 φ_i，那么 i 方向速度分量为 $u_{\infty i}$ 时对应速度势 $u_{\infty i}\varphi_i$。假设非圆截面弹体横向流问题在 y 方向有单位速度来流条件下速度势 φ_1，在 z 方向有单位速度来流条件下速度势 φ_3，那么在 $(0, u_{\infty y}, u_{\infty z})$ 来流条件下速度势为：

$$\varphi = u_{\infty y}\varphi_2 + u_{\infty z}\varphi_3 \tag{9.9}$$

这样一来，φ_2 和 φ_3 对应于单位速度产生的扰动速度势，相当于采用无穷远处来流速度无量纲以后的结果，因此 φ_2 和 φ_3 仅是弹体截面形状的函数。

将上式代入非圆截面弹体横向流问题小扰动能量形式(9.6)，得到：

$$\begin{aligned} T &= -\frac{\rho}{2} u_{\infty y} u_{\infty y} \oiint_{S_w} \varphi_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \mathrm{d}s - u_{\infty y} u_{\infty z} \oiint_{S_w} \varphi_2 \frac{\partial \varphi_3}{\partial n} \mathrm{d}s \\ &\quad - \frac{\rho}{2} u_{\infty z} u_{\infty y} \oiint_{S_w} \varphi_3 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \mathrm{d}s - u_{\infty z} u_{\infty z} \oiint_{S_w} \varphi_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial n} \mathrm{d}s \\ &= -\frac{\rho}{2} \sum_{i,j=2}^{3} u_{\infty i} u_{\infty j} B_{ij} \end{aligned} \tag{9.10}$$

这里：

$$\left.\begin{aligned} B_{ij} &= \oiint \varphi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} \mathrm{d}s = \int_0^L A_{ij} \mathrm{d}x \\ A_{ij} &= \oint_l \varphi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} \mathrm{d}l \end{aligned}\right\} \tag{9.11}$$

式中，$\mathrm{d}l$ 为控制体所截弹体的弧长微元。从 A_{ij} 表达式可以看出，仅仅与 $\xi = x$ 处截面的几何形状有关，定义为截面形状系数。

对于封闭曲线，由格林定理知：

$$\oint_l \varphi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} \mathrm{d}l = \oiint_{S(x)} (\varphi_i \Delta \varphi_j + \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j) \mathrm{d}\sigma = \oiint_{S(x)} (\nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j) \mathrm{d}\sigma$$

因此 $A_{ij} = A_{ji}$；对于一般弹体截面都具有对称面 $\varphi_2(y, -z) = \varphi_2(y, z)$，可以推出 $A_{23} = A_{32} = 0$。下面建立截面形状系数 A_{22}、A_{33} 和气动力的关系。

在如图 9.2 所示轴向 $\xi = x$ 位置的控制体 δx 微段内流体的做功动能为：

$$\delta T = -\frac{\rho}{2}\cdot\delta x\sum_{i,j=2}^{3}u_{\infty i}u_{\infty j}A_{ij} = -\frac{\rho}{2}\cdot\delta x\cdot(u_{\infty y}^2A_{22}+u_{\infty z}^2A_{33}) \tag{9.12}$$

在 δx 微段内,弹体引起流场速度变化,传给流体微元动量的 δp 可写为流体动能微元 δT 对流体运动速度的微分:

$$\left.\begin{aligned}\delta p_y &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u_{\infty y}}(\delta T) = -\rho\delta x u_{\infty y}A_{22}\\ \delta p_z &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u_{\infty z}}(\delta T) = -\rho\delta x u_{\infty y}A_{33}\end{aligned}\right\} \tag{9.13}$$

作用力就是单位时间内动量改变,在控制体 δx 微段内流体对弹体所产生的法向力 δF_y 和侧向力 δF_z 可以表示为:

$$\left.\begin{aligned}\delta F_y &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\delta p_y)\\ \delta F_z &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\delta p_z)\end{aligned}\right\} \tag{9.14}$$

根据流体力学中随体导数的定义:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\delta p_y) &= \frac{\partial}{\partial t}(-\delta p_y)+\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial x}(-\delta p_y)+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial y}(-\delta p_y)+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial z}(-\delta p_y)\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\delta p_z) &= \frac{\partial}{\partial t}(-\delta p_z)+\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial x}(-\delta p_z)+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial y}(-\delta p_z)+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial z}(-\delta p_z)\end{aligned}\right\} \tag{9.15}$$

对定常流动,δp_y 和 δp_z 不随时间 t 变化;$\rho\delta xA_{22}$ 和 $\rho\delta xA_{33}$ 是质量的量纲,由前面截面形状系数定义可知,A_{22} 和 A_{33} 仅仅是 x 的函数,故 δp_y 和 δp_z 也仅仅是 x 的函数;又知沿轴向的扰动速度 v_x 和轴向速度 $u_{\infty x}$ 相比很小,有:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = V_x = V_{\infty x}+v_x \approx u_\infty$$

这样上式可简化为:

$$\left.\begin{aligned}\delta F_y &= \rho\cdot\delta x\cdot u_\infty^2\cdot\alpha\frac{\mathrm{d}A_{22}}{\mathrm{d}x}\\ \delta F_z &= \rho\cdot\delta x\cdot u_\infty^2\cdot\beta\frac{\mathrm{d}A_{33}}{\mathrm{d}x}\end{aligned}\right\} \tag{9.16}$$

当 $\delta x\to 0$ 时,可得到沿弹体轴向分布的法向力载荷和侧向力载荷:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}F_y}{\mathrm{d}x} &= \lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta F_y}{\delta x} = \rho u_\infty^2\alpha\frac{\mathrm{d}A_{22}}{\mathrm{d}x}\\ \frac{\mathrm{d}F_z}{\mathrm{d}x} &= \lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta F_z}{\delta x} = \rho u_\infty^2\alpha\frac{\mathrm{d}A_{33}}{\mathrm{d}x}\end{aligned}\right\} \tag{9.17}$$

非圆截面弹体的法向力载荷与弹体横截面积的变化率成正比,在横截面积为常数的柱段上,根据小扰动速度势理论得到的结论是不产生气动载荷,这一结论与前面极细长旋成体理论也是一致的。从原理上来说,能够应用于非圆截面弹体的预测理论必须适合于圆截面弹体,比较极细长旋成体和非圆截面弹体的法向力载荷表达式,可以推断出,对于圆截面弹体:

$$\frac{\mathrm{d}A_{22}(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}A_{33}(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}R_w(x)}{\mathrm{d}x}$$

对法向力载荷和侧向力载荷沿弹体轴向进行积分以后进行无量纲化，可得到弹体的法向力系数和侧向力系数：

$$C_y = \frac{\int_0^L \mathrm{d}F_y}{0.5\rho u_\infty^2 S} = \frac{2\alpha}{S} A_{22} \Big|_0^L \tag{9.18}$$

$$C_z = \frac{\int_0^L \mathrm{d}F_z}{0.5\rho u_\infty^2 S} = \frac{2\beta}{S} A_{33} \Big|_0^L \tag{9.19}$$

在前面圆截面弹体理论推导中可以看出，尖头、尖尾细长旋成体的法向力为零。对于符合小扰动假设条件、尖头尖尾的任意截面形状弹体，由于在首尾的截面形状系数为零 $A_{22}(0) = A_{22}(L) = 0$，根据式(9.18)和式(9.19)可知横向流问题一样不产生法向力和侧向力。

根据前面沿轴向载荷分布与任意截面弹体截面形状系数的关系，可得写出压力中心 X_p 为力矩参考点的俯仰力矩系数的积分表达式：

$$\begin{aligned} C_{mz} &= \frac{-\int_0^L (x - X_{cp})\mathrm{d}F_y}{0.5\rho u_\infty^2 S \cdot L} \\ &= -\frac{2\alpha}{S \cdot L}\int_0^L (x - X_p)\mathrm{d}A_{22} \\ &= -\frac{2\alpha}{S \cdot L}\left[(L - X_p)A_{22}(L) - \int_0^L A_{22}(x)\mathrm{d}x\right] \end{aligned} \tag{9.20}$$

式中，S 为参考面积，L 为参考长度。与细长旋成体理论一样，对于任意截面形状的尖头尖尾弹体，法向力为零，但是俯仰力矩不为零，存在一个抬头的不稳定力矩。

§9.2　截面形状系数计算方法

以上在细长体理论假设下，建立了非圆截面弹体横向流问题气动力特性与截面形状系数的关系。根据 A_{22} 和 A_{33} 的定义，在数学上横向流问题气动力转化为求解单位来流速度在当地外形的二维截面内产生的扰动速度势 φ_2 和 φ_3。

对于圆截面弹体，可以采用均匀流和偶极子形成流场来等价横向流问题。例如，半径为 R_w 的圆截面在 y 方向单位速度均匀来流中的全速度势为：

$$\Phi_2 = y + \frac{R_w^2 y}{x^2 + y^2}$$

对应的扰动速度势在柱坐标系下的形式：

$$\varphi_2 = \frac{R_w^2 \sin\theta}{r}$$

求出截面形状系数：

$$A_{22} = A_{33} = \oint_l \frac{R_w^2 \sin\theta}{R_w} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{R_w^2 \sin\theta}{r}\right)_{R_w} \mathrm{d}l = R_w^2 \int_0^{2\pi} \sin^2\theta \mathrm{d}\theta = \pi R_w^2$$

得到弹体的法向力系数 $C_y=2\alpha$、测向力系数 $C_z=2\beta$,结果与上一章介绍的极细长旋成体理论的预测结果一致。

对于圆、椭圆和平板等截面形状,根据复变函数的保角变换方法可以建立与以上均匀流中圆截面绕流速度势之间的关系。例如:横竖轴长分别 a、b 的椭圆截面,采用保角变换得到截面形状系数为:$A_{22}=\pi a^2/4$, $A_{33}=\pi b^2/4$。

对于一般的任意截面形状,难以找到保角变换的解析关系,需要采用前面介绍的鳞片法计算出单位速度直均流中产生扰动速度势的近似值,然后数值积分得到截面形状系数。例如,为求解任意截面的截面形状系数 A_{22},首先把任意截面形状的边界线用 m 个直线段近似,在线段上分布源强为常数的源 σ_j,选择 m 个控制点(y_{i0}, z_{i0}),根据 y 轴单位速度的均匀流在物面需要满足不穿透边界条件,建立 m 阶线性方程组,可得源强 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \cdots, \sigma_m$;这样一来,可以得到 m 个直线段上分布单位源强度为常数连续源在 y 轴单位速度的均匀流中产生的扰动速度势:

$$\varphi_2(y,z) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\sigma_j}{2\pi}\int_j \ln r_j \mathrm{d}\bar{s}_j \tag{9.21}$$

式中:$\bar{s}_j=[(\bar{x}_j-x_j)^2+(\bar{y}_j-y_j)^2]^{1/2}$为积分变量$(\bar{x}_j, \bar{y}_j)$点到第 j 面元上起始坐标(x_j, y_j)距离;$r_j[(y-\bar{y}_j)^2+(z-\bar{z}_j)^2]^{1/2}$为空间任意点$(x, y)$到$(\bar{x}_j, \bar{y}_j)$点距离。

理论上得到扰动速度势式(9.21)代入截面形状系数表达式(9.11)就可以计算 A_{22},但是应用中发现最终的解析函数非常复杂,因此采用如下数值积分近似。

设第 i 面元上控制点坐标为(y_{i0}, z_{i0})、其外法线向量 $\boldsymbol{n}_i$ 与 x 轴的夹角为 β_i;物面边界条件要求:$\left.\frac{\partial \Phi_2(x,y)}{\partial n}\right|_i=0$,即$\left.\frac{\partial \varphi_2(x,y)}{\partial n}\right|_i+\cos\beta_i=0$。假设在第 i 片上产生的扰动速度势近似等于控制点处的值;$\varphi_{2i}=\varphi_2(y_{i0}, z_{i0})$;这样,截面形状系数的函数积分可以写为如下的数值积分计算公式:

$$A_{22} = \int \varphi_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}\mathrm{d}s = \sum_{i=1}^{m} 2a_i \varphi_{2_i} \left.\frac{\partial \varphi_2}{\partial n}\right|_i = -\sum_{i=1}^{m} 2a_i \varphi_{2_i} \cos\beta_i \tag{9.22}$$

这里定义第片的长度为 $2a_i$。

表 9.1 非圆截面截面形状系数比较

截面几何外形	计算值	理论值	误差
圆,$r=1$	3.1626	3.142	+0.65%
椭圆,$a=4, b=2$	12.6487	12.566	+0.66%
椭圆,$a=2, b=4$	3.16355	3.142	+0.69%

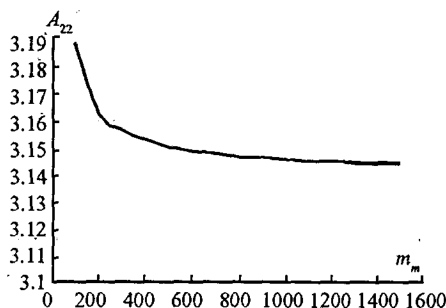


图 9.3 圆截面形状系数计算值与鳞片数的关系(m 为鳞片数)

从以上鳞片法求解截面形状系数 A_{22}和 A_{23}的过程中可以看出必然存在误差,理论上

鳞片数目趋于无穷，计算结果趋近于理论值，实际计算中鳞片数目必须是有限值，为此考察圆截面的鳞片数目对截面形状系数计算结果的影响如图 9.3 所示，表明在鳞片数 $m>800$以后，影响相对很小。

采用以上鳞片法对圆截面和椭圆截面的截面形状系数进行计算，计算结果与理论值比较如表 9.1。

§9.3 非圆截面弹体气动力预估方法及其验证

前面建立了基于极细长体理论的任意截面弹体横向流问题的气动力和截面形状系数之间的数学模型，并且介绍用鳞片法求解截面形状系数 A_{22} 和 A_{33} 的过程，原则上可以得到任意截面弹体的法向力、测向力和俯仰力矩系数。

但是，为便于利用目前较为成熟的细长旋成体预测方法得到的结果，在应用中采用如下对比分析的方法在一定程度上可以消除计算截面形状系数 A_{22} 和 A_{33} 是产生的数值误差。有相同长细比的非圆截面弹体与圆截面弹体的气动力系数比值就是它们截面形状系数之间的比值，以法向力系数为例，有：

$$\frac{C_{N.arb}}{C_{N.cir}}=\frac{\dfrac{2\alpha}{S}A_{22.arb}(L)}{\dfrac{2\alpha}{S}A_{22.cir}(L)}=\frac{A_{22.arb}(L)}{A_{22.cir}(L)} \tag{9.23}$$

这样非圆截面弹体气动力特性预测具体步骤如下：

(1)根据非圆截面弹体的沿轴向横截面分布 $S_{arb}(x)$确定具有相同长细比(头部尾部和全弹)等效旋成体横截面的直径分布 $d_{eq}(x)=\sqrt{\dfrac{4S_{arb}(x)}{\pi}}$。

(2)采用鳞片法计算非圆截面弹体截面形状系数 $A_{22.arb}(x)$和圆截面弹体截面形状系数 $A_{22.cir}(x)$，为消除计算误差，取相同的鳞片数和算法；这样可以得到两种横截面的截面形状系数比值：$f_{arb}(x)=\dfrac{A_{22.arb}(x)}{A_{22.cir}(x)}$。

(3)计算等效圆截面弹体的气动力，如法向力系数 $C_{N.cir}$。

(4)根据截面形状系数比值计算任意截面弹体的气动力系数，例如法向力系数为 $C_{N.arb}=C_{N.cir}\cdot f_{arb}(L)$；取弹体尖头作为力矩参考点，抬头为正，可以推导出俯仰力矩系数：

$$\frac{C_{mz.arb}}{C_{mz.cir}}=\frac{\int_0^L x\,\mathrm{d}A_{22.arb}}{\int_0^L x\,\mathrm{d}A_{22.cir}}=\frac{L.A_{22.arb(L)}-\int_0^L A_{22.arb}(x)\,\mathrm{d}x}{L\cdot S_{base}-V_0}$$

式中：S_{base}为底部面积，V_0 是弹体体积；对于非圆截面弹体和等效圆截面弹体是一样的。如果沿轴向截面形状系数比值为常数，俯仰力矩系数之间也有：

$$\frac{C_{mz.arb}}{C_{mz.cir}}=\frac{L\cdot f_{arb}\cdot A_{22.cir}(L)-f_{arb}\cdot\int_0^L A_{22.cir}(x)\,\mathrm{d}x}{L\cdot S_{base}-V_0}=f_{arb}$$

为了考核以上预测方法预测精度和适用范围，需要根据实验结果进行验证，下面是对目前能找到实验数据的非圆截面弹体气动力进行比较。

具体情况参见文献[2]。

§9.3.1　椭圆截面弹体法向力系数估算

在文献中对头部长细比 $\lambda_{tb} = L_{tb}/\sqrt{S_{max}/\pi} = 3.333$、全弹长细比 $\lambda = 10.0$ 椭圆截面细长弹体在马赫数 $M_\infty = 2.50, 2.96, 3.95, 4.63$ 和迎角 $\alpha \leqslant 16°$ 参数范围内进行了实验研究；给出椭圆横纵轴比值变化范围 $a/b = 2.0, 1.5, 0.5$ 的法向力系数。依据以上建立的非圆截面预测方法，对实验模型的法向力系数进行计算，预测值和实验值比较如图 9.4 所示。

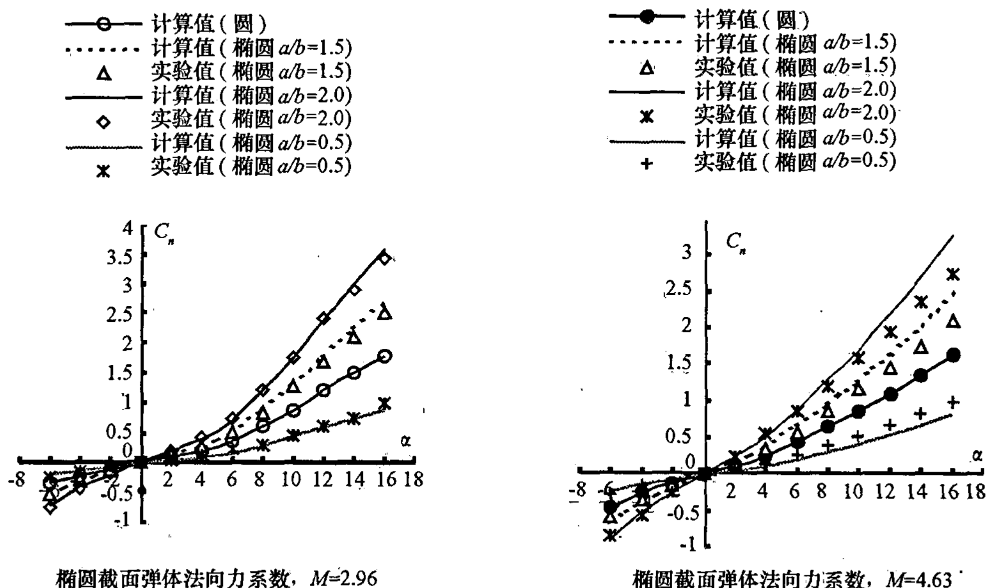


图 9.4　椭圆截面弹体法向力系数估算和实验值比较

由图中发现，在低马赫数情况下符合较好，例如 $M_\infty = 2.50$，直到 $\alpha = 16°$时还有较好预测精度；但是随着马赫数和迎角增加，计算值和实验值的偏差也越来越大，到了马赫数 $M_\infty = 4.63$ 情况下，小迎角 $\alpha = 4°$时误差较为明显；这主要是因为弹体小扰动速度势线化方程是在飞行马赫数 $|1 - M_\infty^2| \approx 1$ 量级、忽略粘性影响的小迎角条件下推导出来的，对于接近高超声速、较大迎角的流动已经不太适用。

为了工程应用方便，根据计算得到的椭圆截面与等效圆截面形状系数比值 f_{arb} 进行数据多项式拟合，以椭圆横纵轴比值 $\xi = a/b$ 作为自变量，拟合函数：

$$f_{arb}(\xi) = 1.63552 + 1.00643(\xi - 1.62481) \tag{9.24}$$

§9.3.2 矩形、正方形截面弹体法向力系数估算

对头部长细比 $\lambda_{tb}=L_{tb}/\sqrt{S_{max}/\pi}=1.5$、长细比 $\lambda=6.5$ 具有相同最大横截面和相同长细比的圆截面、矩形截面和正方形截面弹体在马赫数为 $M_\infty=0.75$ 和迎角 $\alpha\leqslant14°$参数范围内进行了实验研究。矩形截面宽高比值为 $a/b=1.825$,矩形截面和正方形截面带有半径为 $r=0.1b$ 倒角圆,实验中对矩形截面弹体转动 90°放置、正方形截面弹体转动 45°放置,因此共有 5 种模型。

依据以上建立的非圆截面预测方法,对实验模型的法向力系数进行计算,预测值和实验值比较如图 9.5 所示。可以看出,除了 45°放置正方形截面弹体外,预测值和实验值符合较好。为了工程应用方便,根据计算得到的正方形截面与等效圆截面形状系数比值 f_{arb} 进行拟合,以倒角圆半径为和边长比值 $\xi=r/b$ 作为自变量,拟合多项式函数:

$$f_{arb}(\xi)=1.06134-0.40694(\xi-\xi_0)+0.817892(\xi-\xi_0)^2$$
$$-0.07611(\xi-\xi_0)^2-4.16364(\xi-\xi_0)^4+14.1487(\xi-\xi_0)^5 \qquad (9.25)$$

其中 $\xi_0=0.25$。

由于矩形截面有两个变量,拟合函数比较复杂,需要作成图表,在此省略。

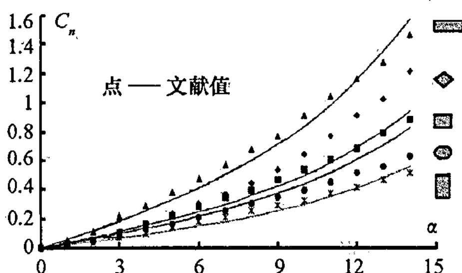


图 9.5 矩形、正方形截面弹体法向力系数预估值和实验比较

§9.3.3 三角形截面弹体法向力系数估算

头部长细比 $\lambda_{tb}=L_{tb}/\sqrt{S_{max}/\pi}=3.333$、全弹长细比 $\lambda=10.0$ 三角形截面细长弹体在马赫数 $M_\infty=2.50,2.96,3.95,4.63$ 和迎角 $\alpha\leqslant16°$参数范围内进行了实验研究,法向力系数随迎角变化的预测值和实验值比较如图 9.6 所示。

可以看出预测方法得到的截面形状系数无法反映三角形截面弹体正放和倒放的区别,这两种情况下非圆截面弹体的粘性效应有较大差别,因此产生一定的偏差。其余情况基本符合。

从以上结果比较看,本文介绍的估算方法,在飞行马赫数 $|1-M_\infty^2|\approx1$ 量级、忽略粘性影响的小迎角条件下,无论是亚音速流还是超音速流,气动力预测精度好,基本满足非圆截面导弹初步设计的需要。

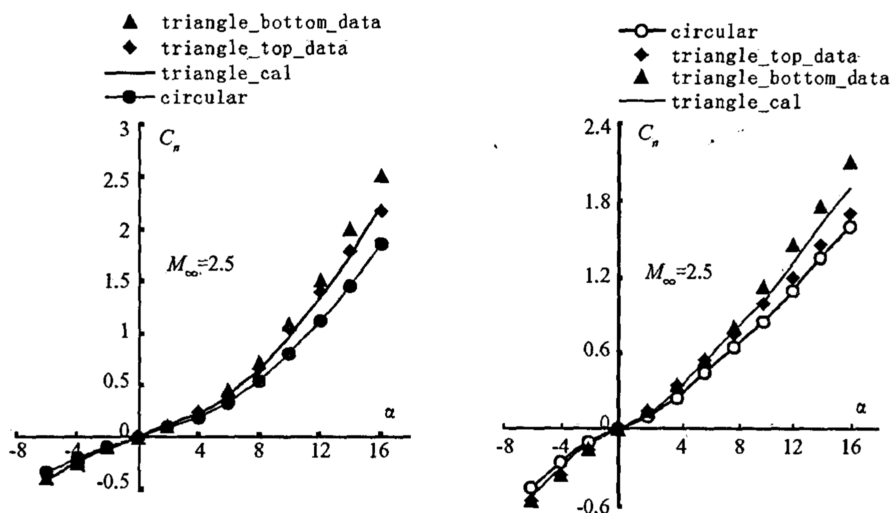


图 9.6 三角形截面弹体法向力系数预估值和实验比较，$M_\infty=2.5$

§9.3.4 非圆截面弹体俯仰力矩系数估算

如果取弹体尖头作为力矩参考点，抬头为正，把弹体沿轴线离散为 n 段，线段长度记为 Δx，可以得到非圆截面弹体俯仰力矩系数的数值计算表达式：

$$C_{mz.arb}=-\frac{2\alpha\cdot A_{22}(L)}{S}+\frac{2\alpha}{S\cdot L}\sum_{i=1}^{n}A_{22}(x_{i+\frac{1}{2}})\cdot\Delta x \tag{9.26}$$

对于椭圆截面、矩形截面弹体和正方形截面弹体头部段俯仰力矩进行了预测，预测值和实验值比较图 9.7 所示，符合较好。

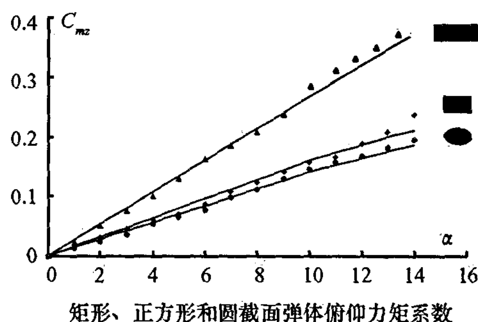


图 9.7 非圆截面弹体俯仰力矩系数预估值和实验比较

给出的非圆截面弹体相对压力中心位置：

$$\bar{X}^p_{P.arb}\doteq-\frac{C_{mz}}{C_y}=1-\frac{1}{L\cdot A_{22}(L)}\sum_{i=1}^{n}A_{22}(x_{i+\frac{1}{2}})\Delta x_i \tag{9.27}$$

根据细长体理论，弹体头部产生正的法向力，尾部产生负的法向力，而圆柱部分的法

向力为零。但是，由于实际流动是有粘性的，在尾部负的法向力略小于头部正的法向力，这一差异经过力臂放大以后，对俯仰力矩和压心位置有一定的影响。在工程应用中，细长旋成体理论的基础上根据实验数据提出一些压心位置的经验修正公式，为此本文建议非圆截面弹体压力中心采用如下方法计算：

$$X_{P.arb} = X^{e}_{P.cir} + (X^{p}_{P.arb} - X^{p}_{P.cir}) \tag{9.24}$$

式中，$X^{e}_{PB.cir}$为各种经验修正公式的等效圆截面弹体压力中心位置，$X^{p}_{P.arb}$和$X^{p}_{P.cir}$分别为按以上方法估算得到的非圆截面弹体和等效圆截面弹体压力中心位置。

实验模型如图 9.8 示意，椎体头部与圆形、八角形、正方形和三角形截面身部构成的弹体外形，来流马赫数 $M_\infty = 1.64$ 和迎角 $\alpha \leqslant 15°$参数范围。计算得到的沿对称轴的弹体截面形状系数与参考面积比值如图 9.9。

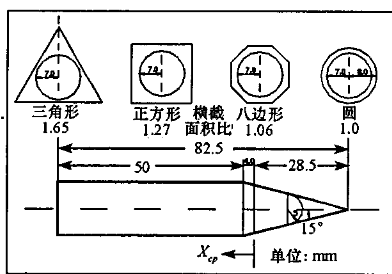


图 9.8　弹体模型

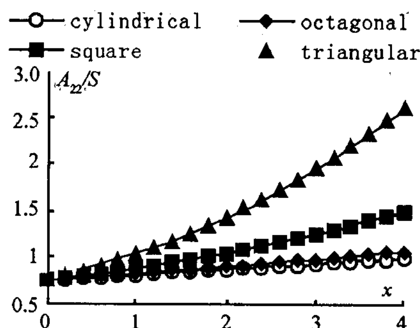


图 9.9　弹体截面形状系数分布

法向力系数随迎角变化的预测值和实验值比较如图 9.10，符合较好；以全弹长度为参考，文献中仅仅提供两种模型的压心实验数据，相对压心的预测值和实验值比较如图 9.11。非圆截面弹体压力中心位置和其等效圆截面弹体压力中心位置相比略靠后，但是相差不是很大，在精度要求不高时，可直接用对应的等效圆截面弹体压力中心位置近似代替。

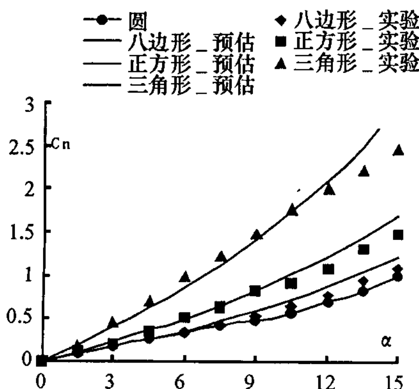


图 9.10　法向力系数预估值和文献值比较

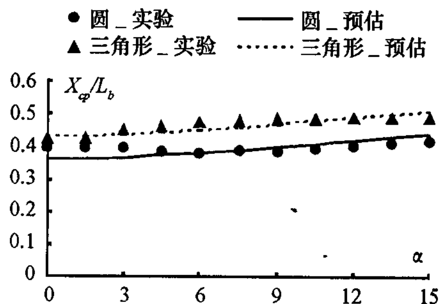


图 9.11　相对压心预估值和文献值比较

习 题

9－1 推导小扰动假设条件下非圆截面弹体压力系数表达式。

9－2 证明：无穷远处来流为单位速度分量时，满足小扰动速度势方程及物面条件的解为 φ_1，那么速度分量为 u_∞ 时对应速度势 $\varphi = u_\infty \varphi_1$。

9－3 证明：截面形状系数 $A_{ij} = A_{ji}$。

9－4 证明：弹体截面具有对称面 $\varphi_2(y, -z) = \varphi_2(y, z)$ 时 $A_{23} = A_{32} = 0$。

9－5 证明：设第 i 面元上控制点坐标为 (y_{i0}, z_{i0})、其外法线向量 $\boldsymbol{n}_i$ 与 x 轴的夹角为 β_i；单位速度分量时，物面边界条件要求：$\left.\dfrac{\partial \varphi_2(x, y)}{\partial n}\right|_i + \cos\beta_i = 0$。

9－6 简单叙述求解非圆截面弹体气动力的过程。

9－7 推导非圆截面弹体俯仰力矩系数表达式。

9－8 采用附录提供的截面形状系数计算程序进行书中例题的验证。

第十章　翼身组合体气动力预测方法

飞行器一般包含机翼、尾翼和弹体等气动部件，在部件空气动力学研究中，把所组成的外形称为翼身组合体。由于机翼和尾翼形状相似、预测气动力的方法一样，所以在部件空气动力学领域习惯上把单独机翼、单独尾翼统称为弹翼；但是在组合成飞行器以后，考虑各个部件之间相互干扰时，机翼和尾翼有差异，因此有时为了强调这一点，称为翼身尾组合体。正常情况下尾翼包括水平尾翼和垂直尾翼，在仅仅研究纵向气动特性时，一般不考虑垂直尾翼的影响。

在机翼与弹体的气动力预测方法中，给出几何参数对气动力特性的影响模型；在翼身组合体气动力建模过程中，除了这些参数依然存在外，还出现新的参数，例如机翼、尾翼和弹体的相对位置、相对大小等。描述翼身组合体的主要几何参数有：机翼安装角、机翼轴向位置、机翼高度、尾翼安装角、尾翼相对于机翼 1/4 弦点的轴向位置、尾翼高度等；根据弹翼相对于弹体轴线的位置，分为中单翼、下单翼和上单翼气动布局。

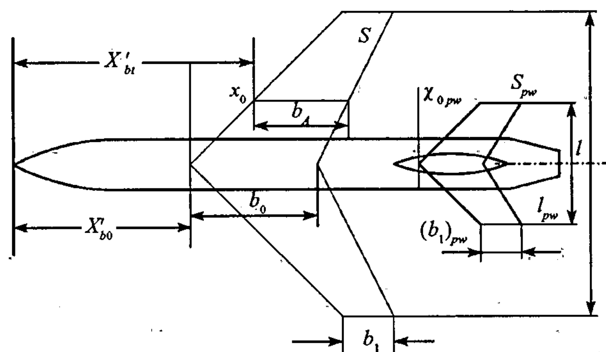


图 10.1　翼身组合体的主要几何参数

前面介绍了进行单独机翼与单独弹体气动力预测的线化理论，由于机翼与弹体之间存在相互干扰，因此机翼与弹体组合构成翼身组合体时，它的气动力并不等于单独机翼与单独弹体的气动力之和。风洞实验结果表明，对于常见的无安装角中单翼布局翼身组合体，在相同自由来流参数条件下，弹体存在时机翼的升力比单独机翼产生的升力大，机翼存在时弹体升力比单独弹体升力大。

由于翼身组合体的几何参数较多，考虑所有因素的气动力建模非常复杂，按照本课程的指导思想，根据实验数据分析，提出如下一些假设：

(1)机翼轴向位置变化对翼身组合体气动力干扰量没有影响；

(2)机翼所在位置的弹体为柱段,即这部分弹体的截面积沿轴向保持不变;
(3)机翼对下游的尾翼有影响,尾翼对上游的机翼没有影响;
(4)分析气动力干扰量时不考虑翼身组合体对部件的二次干扰。

§10.1 部件组合产生的干扰机理分析

根据小扰动速势理论、基于部件组合法思想,针对中单翼、圆柱弹体、无安装角的翼身组合体,定性分析弹体和机翼的干扰机理。

首先,不考虑机翼对弹体的干扰,分析弹体存在时引起机翼绕流变化,在迎角不为零的情况下,弹体横向流问题等价于在 y 方向来流 $u_\infty \alpha$ 中偶极子产生扰动,如图 10.2,根据二维圆柱速势流的理论解:

$$v_y = u_\infty \alpha\left(1 - \frac{R_w^2}{r^2}\cos 2\theta\right) \tag{10.1}$$

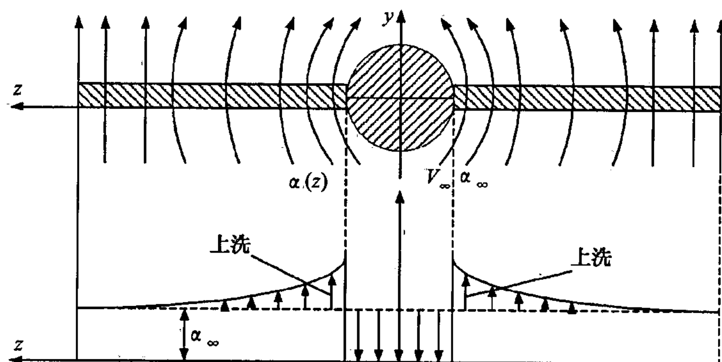


图 10.2 弹体对机翼的干扰

对应于机翼线化平面 $y=0$,有 $r=z$ 和 $\theta=\pi/2$,因此,在弹体外侧引起向上的扰动速度,相对于 x 方向自由来流 u_∞ 就是增加了机翼的上洗效应。假设不考虑三维机翼自由涡面的诱导下洗,弹体存在时引起机翼位置当地迎角从 α 变为:

$$\alpha_l = \frac{v_y}{u_\infty} = \alpha\left(1 + \frac{R_w^2}{z^2}\right) \tag{10.2}$$

可以看出,离弹体越近当地迎角越大,弹体干扰使得机翼增加的升力就越大。如果翼展相对于弹体半径非常小:$z \to R_w$,这时有 $\alpha_l \to 2\alpha$,即弹体干扰使得机翼升力增加一倍。对于低速大展弦比直机翼,弹体半径相对于翼展很小:$z \gg R_w$,这时在远离弹体的位置影响很小 $\alpha_l \to \alpha$;综合弹体附近迎角引起的机翼升力增量和机翼隐没在弹体内部那部分面积产生的升力,工程估算中,对于大展弦比直机翼的翼身组合体,直接采用包括弹体内部面积的毛机翼的升力来近似弹体干扰情况下机翼的升力。

下面,不考虑弹体对机翼的干扰,分析机翼存在时弹体绕流变化。如图 10.3,对于亚声速流动,薄翼绕流可以用附着涡和自由涡代替,自由涡对流场产生下洗效应,但是附着

涡在机翼前方引起上洗效应，在机翼后方引起下洗效应，总的效果是对升力影响不大，但是对俯仰力矩特性有干扰；对于超声速流动，对机翼前方的弹体不产生影响，不存在附着涡引起的上洗效应，只有在机翼后方引起下洗效应，总的效果是产生很小的负升力，对俯仰力矩特性的干扰比亚声速流动更严重。前面细长体理论推导出，在小迎角范围单独圆柱段弹体不产生升力，但是在翼身组合体中也要产生升力。

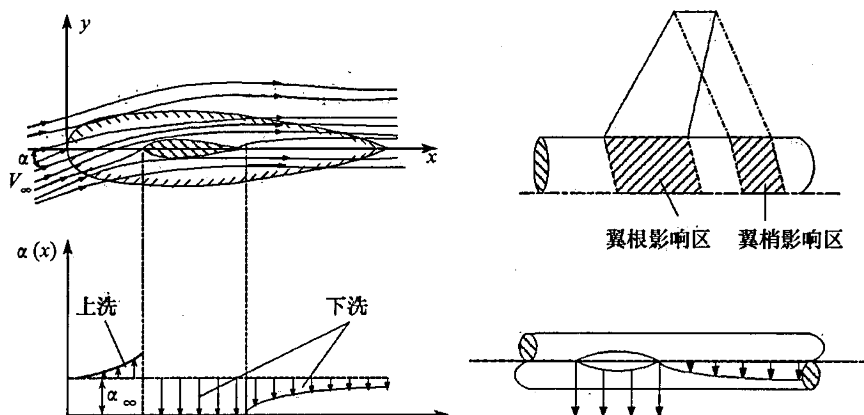


图 10.3　机翼对弹体的干扰

以上讨论中没有考虑弹体和机翼之间相互的影响，因此仅仅能定性说明干扰引起气动力的变化趋势。

目前，在线化速势度理论中，对于翼身组合体的气动力相互干扰影响量的预测方法主要有基于有限基本解的格子法和基于细长体理论的干扰因子法。

§10.2　布置有限基本解的格子法

无粘、定常、等熵、无旋条件下，采用小扰动假设$|v_x|,|v_y|,|v_z|\ll u_\infty$，根据量纲分析，得到飞行马赫数$|1-M_\infty^2|\approx O(1)$量级，描述小迎角飞行条件下翼身组合体绕流的小扰动速度势的线化方程：

$$(1-M_\infty^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0 \tag{10.3}$$

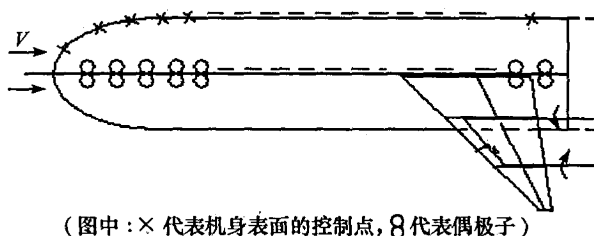
在未扰动区：$\varphi=0$；在物面边界条件：$\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}=0$；对于亚声速机翼在后缘还需要增加 Kutta - Joukowski 条件；弹体必须是尖头的。

根据数理方程理论，给定边界条件，可以得到翼身组合体的小扰动速度势，从而求出翼身组合体的气动力特性，实际应用中难以找到解析解，经常采用布置有限基本解的格子法，通过计算的方法得到翼身组合体的小扰动速度势近似解。

应用格子法求解翼身组合体的小扰动速度势时，与前面介绍的机翼绕流的格子法相似。首先，把连续的翼身组合体表面离散为有限个数的网格，离散过程中要注意在两个部件相接处的网格协调，处理不好会增大所建立的线性代数方程组的奇性。然后，在网格上

分布强度为常数的基本解；一般在翼身组合体中的升力部件，如机翼和尾翼，布置马蹄涡、涡环和偶极子等有限基本解；非升力部件，如弹体或机翼厚度问题布置源汇。最后，在翼身组合体表面设置控制点，一般取网格内部点，在控制点上满足边界条件，建立线性方程组解得基本解强度分布。为减少计算工作量和所需的存储量，经常把机翼和弹身分开用迭代法求解，先计算单独机翼基本解强度分布及其在弹身控制点上所诱起的法向速度，在弹身边界条件方程组的自由项上附加这一法向速度，解得弹身上基本解强度分布；然后建立存在弹身时机翼边界条件方程组的自由项时，考虑弹身上基本解强度的影响。

如图 10.4，对于薄机翼大多数情况下不考虑厚度问题，在线化平面或者机翼实际中弧面上布置马蹄涡，控制点取为网格 3/4 弦线的中点。应用格子法处理弹身问题比较复杂，对于中单翼布局，首先需要转化为横截面积分布与真实弹身相同的当量旋成体，然后轴线上等距布置轴向偶极子模拟横向流问题和弹身厚度；对于其他布局，除了在弹身表面布置涡环，在弹身内部分布马蹄涡系的镜像涡系才能抵消机翼涡的扰动，使弹身表面满足边界条件。由于弹身与机翼连接曲线变化不连续，因此求解在后缘处布置自由尾涡可控制偏转的马蹄涡，保证流动的库塔条件。



（图中：× 代表机身表面的控制点，8 代表偶极子）

图 10.4　翼身组合体的格子法

§ 10.3　细长旋成体线化理论

对于由小展弦比剖面为对称翼型的中单薄翼、无安装角、细长旋成体组成的、中单翼布局的翼身组合体的绕流，小扰动速势线性方程为式(10.3)，在弹体坐标系下物面边界条件为：

在平板翼上下表面：

$$v_y\Big|_w = \frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|_{y=0} = -u_\infty\alpha$$

在旋成体表面：

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|_{R_w} = u_\infty\frac{\mathrm{d}R_w(x)}{\mathrm{d}x} - u_\infty\alpha\cos\theta$$

在迎角为零条件下，无穷薄平板翼的物面边界条件自动满足，翼身组合体的轴向流问题就是单独细长旋成体的轴向流问题，可以采用第八章方法分析；由于细长旋成体轴向流问题不产生升力，预测阻力时没有考虑粘性作用，因此推导出的结论还需要修正，有关内

容可以相关参考文献，这里不深入讨论。

对于横向流问题 $\varphi_2=\varphi-\varphi_1$，如果弹翼和弹体结合部分为圆柱，物面边界条件为：

$$\left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right|_{y=0}=-u_\infty\alpha \text{ 和} \left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right|_{R_w}=-u_\infty\alpha\cos\theta$$

相当于 $u_\infty\alpha$ 流过翼身组合体满足的物面边界条件。对于细长旋成体，由于三维效应，流向扰动速度是比其他两个方向扰动速度更小的量 $|v_x|\ll|v_r|,|v_\theta|$，因此翼身组合体横向流问题可以退化为也满足 $y-z$ 平面内的 Laplace 方程。

l 为中单翼布局组合体的展长，R_w 圆柱半径，$l-2R_w$ 是无穷薄平板弹翼外露展长。根据复变函数理论，在 $y-z$ 二维平面内，可以找到圆、无穷薄平板和翼身组合体横截面之间的保角变换解析表达式，通过均匀流过圆的速度势，求出无穷薄平板和翼身组合体横截面的速度势，然后求出流场速度，根据 Bernoulli 方程可以得到无穷薄平板和翼身组合体横截面的法向力：

$$Y_W=\frac{1}{2}\rho u_\infty^2\cdot\frac{\alpha\pi}{2}(l-2R_w)^2 \tag{10.4}$$

$$Y_{W-B}=\frac{1}{2}\rho u_\infty^2\cdot\frac{\alpha\pi}{2}\frac{(l+2R_w)^2(l-2R_w)^2}{l^2} \tag{10.5}$$

在前面介绍过小展弦比三角翼，在很小的迎角下就发生从顶点开始的流动分离，形成前缘脱体涡，线化理论不再适用，根据以上公式预测得到的法向力有较大的偏差。对于小展弦比三角翼，除本节介绍的细长体理论外，还有其他更为准确的预测方法，例如介绍过前缘吸力模型可以得到与实验较为符合的结果，因此在实际工程应用中采用部件组拆法，通过对单独机翼进行修正得到翼身组合体的气动力，翼身组合体与单独机翼升力的比值 K_{WB} 称为干扰因子。

干扰因子可以通过实验、数值模拟和理论求出。对于由小展弦比、单薄翼、无安装角、细长旋成体组成的翼身组合体的绕流，在小迎角条件下，升力近似等于法向力，根据本节细长体线化理论推导出的翼身组合体与单独机翼法向力式(10.4)和(10.5)，得到干扰因子的解析表达式：

$$K_{WB}=\frac{Y_{W-B}}{Y_W}=\left(1+\frac{2R_w}{l}\right)^2=\left(1+\frac{D_w}{l}\right)^2 \tag{10.6}$$

由于本书中不涉及复变函数相关知识，以上内容推导过程详见文献[1]。

在文献[2]中对以上圆截面形状的细长弹体和中单翼布局进行拓展，给出椭圆截面细长弹体和中单翼布局、小展弦比翼构成的翼身组合体的干扰因子解析表达式：

$$(K_{WB})_e=H(K_{WB})_{cir} \tag{10.7}$$

$$H=\left(\frac{k/a}{\frac{l}{2a}-\frac{2a}{l}}\right)^2,\quad c=\frac{l}{2a}+\sqrt{\left(\frac{l}{2a}\right)^2+\left(\frac{b}{a}\right)^2-1}$$

$$\frac{k}{a}=\frac{c}{2}+\frac{(1+\frac{b}{a})^2}{2c}$$

式中，a、b 分别为椭圆截面横纵半轴长度、l 为毛弹翼展长，$(K_{WB})_{cir}$ 为当量圆截面弹体中

单翼组合体的弹体弹翼干扰系数，即(10.6)式，当量圆截面弹体的半径取椭圆截面弹体在翼展方向上的横轴长：$R_w = a$。

§10.4 非圆截面极细长体线化理论

原则上，对于非中单翼布局、非圆截面的细长弹体也可以采用保角变换方法求出干扰因子，但是到目前为止很少得到这种变换关系式。因此，在工程应用中，有部分研究人员直接通过实验数据整理拟合和计算流体力学手段来确定干扰因子，这样得到的干扰因子仅仅是用于所研究特定弹体截面形状布局，缺乏普适性。这些方法失去了部件空气动力学理论模型要求的迅速、花钱少、易于应用的优势。

在上一章推导出了任意截面细长弹体法向载荷与当地截面形状系数之间的关系，并且给出任意截面形状系数估算方法。如果采用长宽比很大的矩形截面来近似平板翼，通过计算矩形截面的形状系数 A_{22_W} 可以求出平板翼的法向力系数：

$$C_{N_W} = \frac{2\alpha A_{22_W}}{S} \tag{10.8}$$

取如图 10.5 所示展长 $l = 2$，厚度比 $c/l = 0.5\% \sim 10\%$ 的矩形截面形状系数进行了计算；计算结果表明：随着翼相对厚度的减小而逐渐趋于 π，当所取鳞片数 $m \geqslant 300$ 时，所得形状系数与鳞片数基本无关。如果参考面积取为 $S = l^2$，根据矩形截面形状系数得到的平板翼法向力系数逐渐趋于：$C_{N_W} = \pi\alpha/2$，与文献[1]中根据复变函数理论得到的结论完全一致。

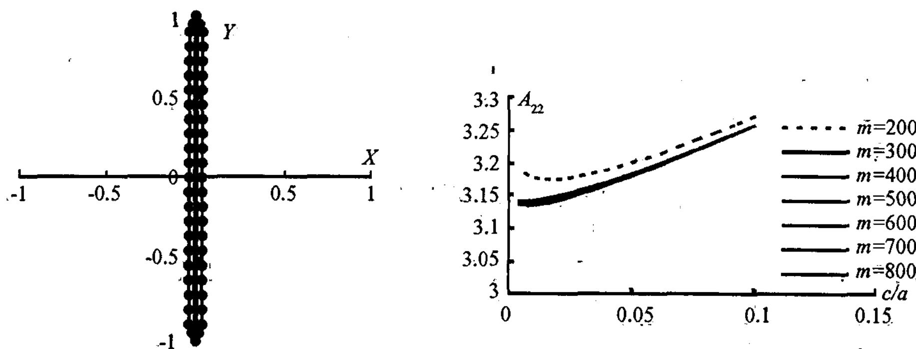


图 10.5 鳞片法求平板截面形状系数示意图

上述研究为高效确定翼身组合体干扰因子提供了一种新的途径。对于任意截面弹体、薄平板翼组成的符合极细长体流动特征的翼组合体，在小迎角情况下，翼身组合体的横向流问题可以看作是一个特殊的任意截面弹体的横向流问题，用长宽比大于 10 的矩形截面代替薄平板弹翼，和弹体截面相交以后，外边轮廓线相连形成一个单连通域，采用上一章的计算方法求解这一单连通域的截面形状系数，可以得到细长体翼组合体的法向力系数：

$$C_{N_{WB}} = \frac{2\alpha A_{22_{WB}}}{S} \tag{10.9}$$

按照干扰因子的定义，可以得到任意截面形状系数表达的干扰因子 K_{WB}：

$$K_{WB} = \frac{A_{22_{WB}}}{A_{22_W}} \tag{10.10}$$

首先对已经有理论值的圆截面中单翼布局进行计算。计算模型如图 10.6 所示，半径为 $R_w = 1$，展长可变化，近似代表薄翼的矩形截面厚度和展长比 $c/l = 8.4\%$，鳞片数 $m \geqslant 400$。干扰因子计算结果与理论模型的公式(10.6)的比较如图 10.7 所示，符合较好，表明计算方法具有较好的预测精度。

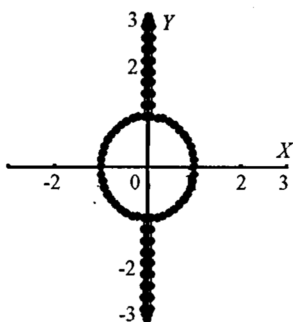


图 10.6　圆截面弹体中单翼组合体翼体

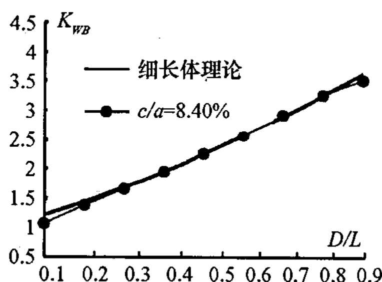
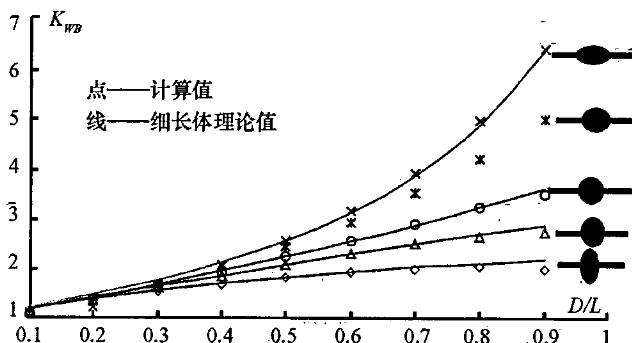


图 10.7　干扰系数计算值与细长体理论值比较

对椭圆截面弹体弹翼组合体干扰因子计算和文献[2]中理论模型公式(10.7) 比较见图 10.8 所示，进一步证明本文计算方法与已有理论相一致。

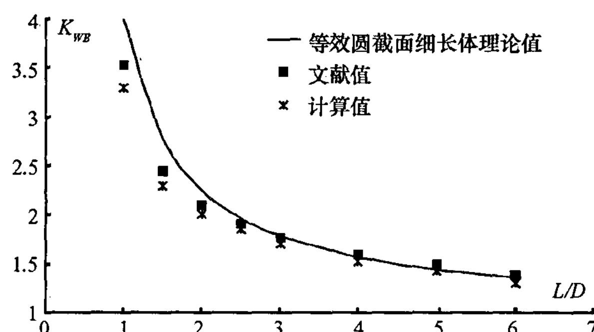


椭圆截面弹体中单翼组合体翼体干扰系数计算值与细长体理论值
（D 为弹体翼展方向轴，L 为毛翼展长，椭圆截面椭圆度分别为
2.0，1.5，1.0，0.75，0.5，翼相对厚度取 8.4%）

图 10.8　椭圆截面弹体中单翼组合体翼体干扰系数计算值与细长体理论值比较

从建立过程看，本文基于该截面形状系数求解干扰因子的方法，不但适合于中单翼布局，也适合于十字形和 × 形等其他布局形式可为任意截面导弹空气动力初步估算提供因

子。非圆截面弹体弹翼组合体的研究文献很少。从已有的少量数据比较看,采用本文方法估算非圆截面弹体的翼身组合体干扰因子,与其他方法得到的结果非常接近,具有较好的预估精度。图 10.9 是倒角圆半径为边长的 0.25 倍的正方形截面弹体、小展弦比三角翼、中单翼布局的组合体,本文方法计算干扰因子和国外文献风洞实验、EULER 方程数值模拟结果的比较。图 10.10 是正方形和长宽比为 2 的长方形截面弹体和 × 形小展弦比三角翼布局的组合体,本文方法计算干扰因子和国外文献风洞实验的比较。



正方形截面十字形翼组合体翼体干扰系数计算值和文献值[26] 比较(倒角圆半径为边长的 0.25 倍,L 为毛翼展长,D 为正方形边长)

图 10.9 正方形截面干扰系数计算值和文献值比较

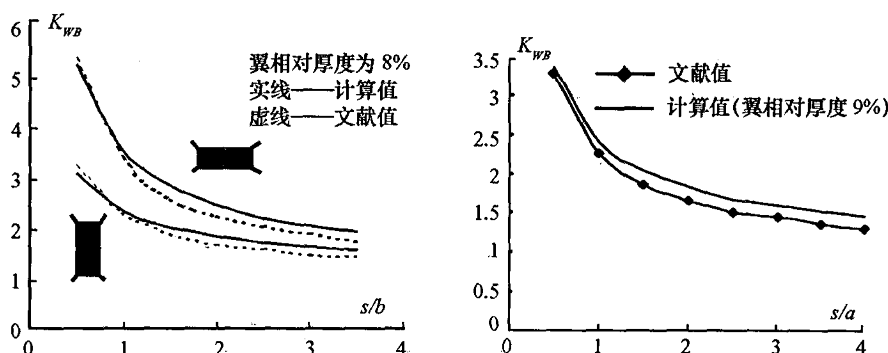


图 10.10 正方形、矩形截面干扰系数计算值和文献值比较

以上推导并提出了计算任意截面弹体和任意弹翼布局的组合体干扰系数的工程计算方法,该方法简单、方便、迅速,只需求解单独弹体、单独弹翼和弹体弹翼组合体的截面形状系数,而不需对导弹流场进行数值计算,计算结果无论和理论解析解(对于圆和椭圆截面),还是和数值解(对于正方形和长方形截面)都符合得较好,该方法可用于工程估算。

§10.5　部件组拆法

部件组拆法:弹体弹翼尾翼组合体的升力及俯仰力矩值可由单独部件的升力及俯仰力矩值之和再加上各部件之间的干扰量。在这些干扰量中,弹体弹翼间的干扰(或弹体尾翼间的干扰)用干扰因子方法计算,弹翼尾翼间的干扰(或称为下洗干扰)用线化理论及细长体理论计算。

特别需要指出的是,在以上两节介绍确定干扰因子的方法中,均假设翼身组合部分中弹体的截面面积保持不变,这部分弹体不产生升力,根据干扰因子确定的翼身组合体升力仅仅包含组合部分中弹体的作用,不是整个弹体的气动力贡献。

§10.5.1　细长翼身组合体

如图 10.11 示意,由小展弦比弹翼、细长体构成的组合体。单独弹体的升力系数为 $C_{L_{B.arb}}$,主要由头部和尾部产生;单独外露弹翼的升力系数为 C_{L_W},面积为 S_W;部件组拆法得到的组合体升力系数为:

$$C_{L_{WB}} = C_{L_{B.arb}} + K_{WB} \cdot C_{L_W} \frac{S_W}{S_B} \tag{10.11}$$

参考面积为弹体横截面面积 S_B,下标 arb 表示弹体截面任意外形。

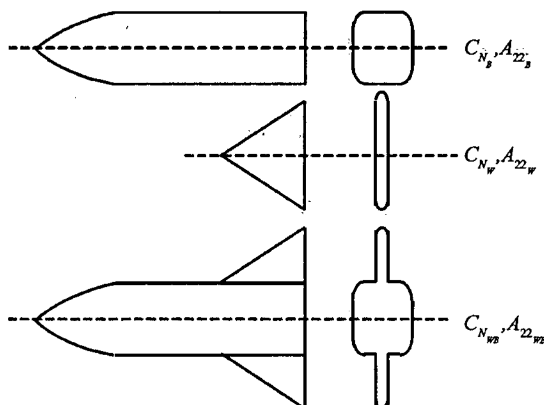


图 10.11　部件组拆法示意图

取弹体尖头作为力矩参考点,部件组拆法得到组合体俯仰力矩系数为:

$$C_{mz_{WB}} = C_{mz_{B.arb}} + X_{P_{BW}} \cdot K_{BW} \cdot C_{L_W} \frac{S_W}{S_B} \tag{10.12}$$

这里 $X_{P_{BW}}$ 是翼身组合段上所产生升力的相对于弹体尖头的压力中心位置,求解方法参见上一章非圆截面弹体和上一节翼身组合体内容。

文献[3]中，对头部长细比 $\lambda_{tb}=L_{tb}/\sqrt{S_{max}/\pi}=1.5$、全弹长细比 $\lambda=6.5$ 具有相同最大横截面和相同长细比的圆截面、矩形截面和正方形截面弹体的翼身组合体，在马赫数为 $M_\infty=0.75$ 和迎角 $\alpha\leqslant 14°$ 参数范围内进行了实验研究。矩形截面宽高比值为 $a/b=1.825$，矩形截面和正方形截面带有半径为 $r=0.1b$ 倒角圆。弹翼平面形状是切尖三角形，外露弹翼的展弦比为2.46，梢根比为0.1，前缘后掠角为53°。前面对单独弹体法向力系数和干扰因子进行预测方法计算结果和实验数据的比较，下面给出组合体升力系数和俯仰力矩系数的比较。

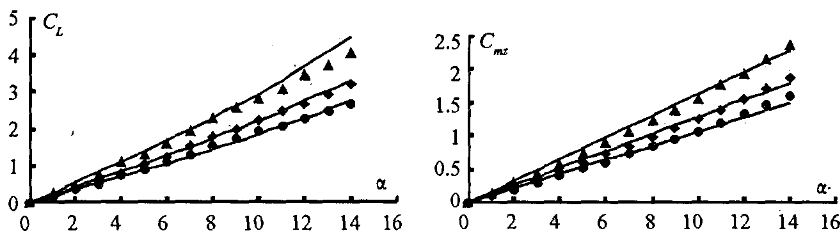


图 10.12　组合体升力系数和俯仰力矩系数预估值和文献值比较

可以看出，除了长方形截面存在一定的偏差，其余外形的估算值和实验值相符较好。

§10.5.2　非小展弦比翼身组合体

以上弹体弹翼之间的干扰因子 K_{WB} 是根据小展弦比薄翼、细长旋成体组成的翼身组合体绕流的横向流问题对应的二维流动建立的，对于有厚度的中等展弦比机翼、非细长旋成体的翼身组合体，无法采用横向流问题得到较为精确的单独外露弹翼升力系数。在工程设计中，在不能采用细长体理论得到的单独外露弹翼升力系数的情况下，用升力线、升力面等较为精确的预测值，或者直接采用风洞实验数据提供单独外露弹翼升力系数，继续按照以上干扰因子 K_{WB} 求翼身组合体的升力系数，实际应用表明这样近似处理可行。

对于大展弦比 $\lambda>5$ 翼身组合体的升力系数直接采用“毛机翼”的升力系数作为翼身组合体的升力系数。

$$C_{L_{WB}}=C_{L_{W(g)}}\frac{S_{W(g)}}{S_B}\tag{10.13}$$

这里下标(g)表示“毛机翼”的参数。

§10.5.3　有安装角的干扰因子估算方法

一般工程应用中定义弹体迎角飞行器迎角，以上讨论了弹翼相对于弹体轴线没有安装角的布局。如果飞行迎角为 α，弹翼迎角也为 α，这种情况下称为“$\alpha\alpha$”情况，干扰因子记为 K_{WB} 或 $K_{\alpha\alpha}$。如果弹翼相对于弹体纵轴有安装角 $\delta\neq 0$，这时即使飞行迎角 $\alpha=0$，弹翼也有迎角 δ，这种情况称“$\delta 0$”情况，干扰因子记为 $K_{\delta 0}$。

在文献[1]中给出中单翼布局的 $K_{\delta 0}$ 估算方法。实际上也可以采用前面介绍的求解

细长翼身组合体 K_{WB} 的方法来估算。例如,对于圆截面弹体,取弹翼平面为参考,弹体截面投影到与弹翼平面垂直的平面上为椭圆形状,可以求出对应的干扰因子,看作是原来问题在"$\delta 0$"情况下的干扰因子 $K_{\delta 0}$。

§10.5.4　尾翼干扰因子估算方法

根据部件组拆法思想,首先求出单独尾翼的气动力,然后在此基础上,尾翼与弹体组合以后要进行干扰量的修正,采用的方法与上一节完全相同;除此以外,由于上游机翼对尾翼还有干扰,因此需要进一步的修正。

实验观察表明,当一个弹体—弹翼—尾翼组合体飞行时,自弹翼后缘拖出涡面,并在距弹翼一定的距离后,涡面卷成一个集中的旋涡,因此下游的尾翼处于集中旋涡区域而受到明显的影响,使流向平尾的气流方向改变;另外,由于上游弹体弹翼对自由来流有阻滞作用,到达平尾处的速度有所降低。

工程上采用减少动压的方法处理弹翼和弹体对气流的阻滞,平尾处的当地动压头和当地马赫数按如下工程经验公式修正:

$$\left.\begin{aligned} q_T &= k_q q_\infty \\ M_T &= M_\infty \sqrt{k_q} \end{aligned}\right\} \tag{10.14}$$

式中,k_q 为平尾处动压头与来流动压头之比,称为平尾处速度阻滞系数。应用中 k_q 主要根据工程经验确定:

(1)当尾翼平面处于弹翼平面之内,即飞行器的弹翼尾翼采用"-·+"、"+·+"或"×·×"型布局时,取0.85;

(2)当尾翼平面与弹翼平面呈45°角交叉,即飞行器的弹翼尾翼"×·+"、"-·×"或"+·×"型布局时,取0.90;

(3)尾翼平面与弹翼平面平行,其纵向距离超过弹体半径时,认为平尾处动压头没有损失,即取1.0。

为了简化计算,可以认为弹翼干扰下尾翼的升力的作用点依然位于单独尾翼的压力中心位置;这样可以求出弹体—弹翼—尾翼组合体的俯仰力矩系数。

平尾处气流方向改变通过上游翼体组合体的诱导速度场来估算。平尾处的气流有效迎角 α_T 定义为:

$$\alpha_T = \alpha + \delta_T - \varepsilon \tag{10.15}$$

式中,α 为无穷远处来流相对于弹体迎角,δ_T 为尾翼安装角(或全动舵面的偏转角),ε 为平尾区域的诱导下洗角。

由于弹翼和弹体对尾翼都有干扰,干扰量与飞行器的气动外形布局之间的影响非常复杂,因此准确地预测下洗角 ε 较为困难。对于大展弦比弹翼、尾翼平面处于弹翼平面之内的弹体—弹翼—尾翼组合体,在小迎角线性升力范围内,下洗角与升力系数成正比,可近似认为 $\partial\varepsilon/\partial\alpha$ 仅与平尾位置有关,建立了一些工程经验公式,可以参考相关文献[1]。

§10.6 部件组拆法应用实例

如图 10.13 示意，巡航导弹以其突防能力强、命中精度高、射程远、机动灵活等特点，已经成为对纵深重要战略目标进行精确打击的主要工具。常规巡航导弹都采用圆截面弹体，而新一代隐身巡航导弹则往往选择了非圆截面弹体：法国的“远程精确投射武器”(APTGD)，英国的“风暴前兆”隐身巡航导弹，美国的“联合防区外发射武器”(AGM－154)，都采用正方形或近似方形截面弹体，弹头头部采用尖头棱锥形；美国的“先进巡航导弹”(AGM－129)弹体则采用菱形截面弹体；法国研制的“阿帕奇”(Apache)导弹弹体采用梯形截面；英国的巡航导弹奥蒂斯(AUTIS)采用矩形截面弹体；美国的新型隐身巡航导弹TSSAM从侧面看像平行四边形，从下面看则像矩形。非圆截面导弹由于具有良好的雷达隐身特性，高升阻比，适合吸气式导弹布局设计，便于贮存、携带与分离等优点，已成为世界各国研制新型巡航导弹时十分重视发展的方向。



图 10.13 “战斧”巡航导弹发射飞行过程示意图

运用本书前面提出的非圆截面导弹空气动力工程估算方法，对如图 10.14 示意的巡航导弹布局外形的升力系数、俯仰力矩系数和相对压力中心进行了预估，并与风洞实验结果作了比较。



图 10.14 非圆截面气动布局示意图

外形分为弹体、弹翼和尾翼三个部分。

弹体头段、身段和尾段长度分别为 $L_{tb}=0.5\text{m}$、$L_{sb}=1.8\text{m}$ 和 $L_{wb}=0.8\text{m}$；身段采用倒

角圆半径 $R_c = 0.05\text{m}$ 的矩形截面，宽和高为 $0.4\text{m} \times 0.23\text{m}$；保持倒角圆半径不变，矩形截面收缩到头部成半球形 $R_N = 0.05\text{m}$，满足末制导仪器的安装；尾部阻力在总阻力中占有很大比例，为了提高升阻比，增加航程，弹体矩形截面向后逐步收缩为半径 $R_{jet} = 0.085\text{m}$ 圆形发动机出口。

大展弦比、无弯、无扭、无上反的长直梯形弹翼，1/4 弦长位于弹体全长的 60% 处；毛弹翼的展长 $L_{yi} = 1.5\text{m}$，翼根弦长 $b_0 = 0.18\text{m}$，翼稍弦长 $b_1 = 0.15\text{m}$；翼型为 NACA0012。

小展弦比、无弯、无扭、无上反的形布局后掠尾翼，后缘与发动机出口平面平齐，毛弹翼的展长 $L_{wyi} = 0.91\text{m}$，前缘后掠角：$\chi_0 = 12.21°$，后缘后掠角：$\chi_1 = 0°$；翼型也为 NACA0012。

以上气动力估算方法预测精度的验证试验在国防科学技术大学 KD-03 低速风洞中完成。KD-03 风洞为闭口直流式风洞，实验段宽、高和长度尺寸为 $1.0\text{m} \times 0.8\text{m} \times 2.0\text{m}$，实验段纵向平均气流偏角 $|\Delta\alpha| \leqslant 0.3°$，横向平均气流偏角 $|\Delta\beta| \leqslant 0.2°$，风速范围 10～55m/s，本次实验风速为 35m/s。

实验模型完全按上述外形缩比制作，为了得到尽可能大的雷诺数，模型缩比定为 1:2.857。模型采用尾支撑，内式六分力应变天平轴线与弹体矩形截面中心重合，安装在弹体长度的 60% 处，天平的根部与攻角机构相联，可以调整模型的姿态；实验时攻角变化范围为 $\alpha = -5° \sim 11°$，角度间隔为 2°。各空气动力系数参考面积取弹体最大横截面面积，参考长度取弹体全长，力矩和压力中心位置参考点取弹体头部。

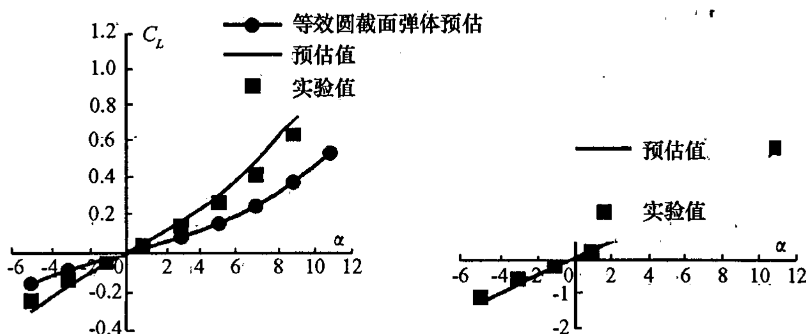


图 10.15　单独弹体升力系数预估值和实验值比较

图 10.15 为单独弹体升力系数预估值和实验值比较，图 10.16 为弹体尾翼组合体升力系数预估值和实验值比较，图 10.17 为弹体尾翼弹翼组合体升力系数预估值和实验值比较。从图中可以看出，对于组合体外型预估值和实验值较为一致，但是单独弹体升力预估值当攻角大于 8°时，偏高于实验值，这主要是因为本文提出的估算方法有其适用范围，当攻角增大时，不能对非线性升力部分进行预测。由于单独弹体升力在组合体中所占比重较小，并不影响组合体升力系数的预估精度。

图 10.18 为单独弹体俯仰力矩系数预估值和实验值比较，图 10.19 为弹体尾翼组合体俯仰力矩系数预估值和实验值比较，图 10.20 为弹体尾翼弹翼组合体俯仰力矩系数预估值和实验值比较。弹体和尾翼及弹翼的组合体俯仰力矩预估值和实验值符合较好；单

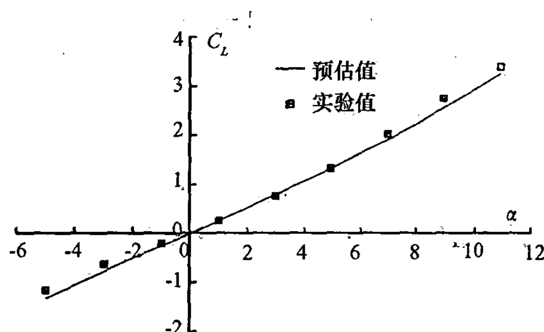


图 10.16 弹体—尾翼组合体升力系数预估值和实验值比较

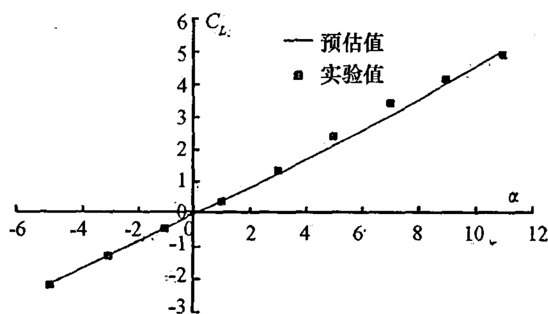


图 10.17 弹体—尾翼—弹翼组合体升力系数预估值和实验值比较

独弹体俯仰力矩预估值和实验值有较大的差别,俯仰力矩系数随攻角的增大应增大,而实验结果是当攻角大于 8°时为负值,除了本文提出的估算方法大攻角时不能对非线性升力部分进行预测这一原因,还有天平力矩量程不适合带来测量误差的因素。

从上述分析可以得出如下结论:可以运用本文提出的非圆截面导弹空气动力工程估算方法代替吹风实验对巡航导弹模型进行空气动力特性的预估,为巡航导弹概念设计和初步设计快速提供所需空气动力数据,预估结果具有一定的精度。

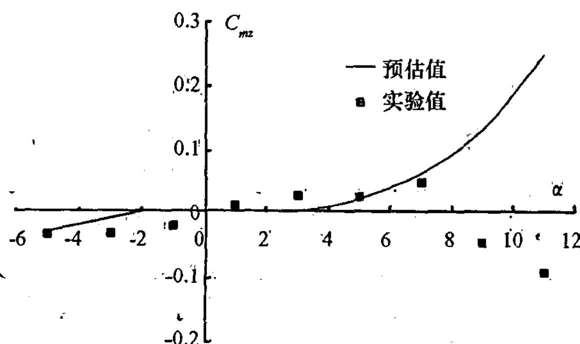


图 10.18 单独弹体俯仰力矩系数预估值和实验值比较

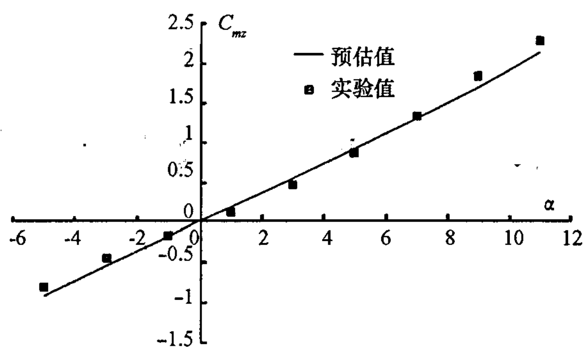


图 10.19　弹体—尾翼组合体俯仰力矩系数预估值和实验值比较

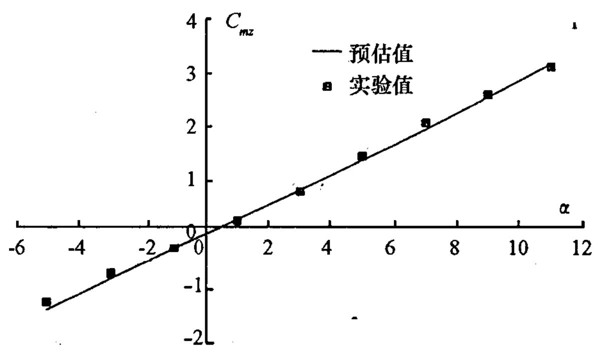


图 10.20　弹体—尾翼—弹翼组合体俯仰力矩系数预估值和实验值比较

附录　截面形状系数计算程序

C++语言源程序：

```
#include "stdlib.h"
#include "stdio.h"
#include "math.h"
int agaus(double [],double [],int n);
double flrgs(double x1,double x2,double x3,double a,double b,double eps);
double flrgsf(double x1,double x2,double x3,double x4);
double f_a11(double *x,double *y,int num)
{
        double j=3.1415926;
        double length[2500],length1[2500];
        double Xarray[2500],Yarray[2500],X1array[2500],Y1array[2500];
        double Carray[2500],Sarray[2500];
        double V[2500];
        double Q[2500],temp;
  double result=0.0;
  double *A;
        A=(double*)malloc(num*num*sizeof(double));
        for(int iii=0;iii<num;iii++)
        {
                Xarray[iii]=x[iii];
                Yarray[iii]=y[iii];
        }
        for(int i9=1;i9<num;i9++)
        {
   length[i9]=sqrt((Xarray[i9]-Xarray[i9-1])*(Xarray[i9]-Xarray[i9-1])+
                  (Yarray[i9]-Yarray[i9-1])*(Yarray[i9]-Yarray[i9-1]));
        }
          length[0]=sqrt((Xarray[0]-Xarray[num-1])*(Xarray[0]-Xarray[num-1])+
                (Yarray[0]-Yarray[num-1])*(Yarray[0]-Yarray[num-1]));
```

```
for (int i2 = 1;i2 < num;i2 + + )
{
        X1array[i2] = 0.5 * (Xarray[i2] + Xarray[i2 - 1]);
        Y1array[i2] = 0.5 * (Yarray[i2] + Yarray[i2 - 1]);
}
X1array[0] = 0.5 * (Xarray[0] + Xarray[num - 1]);
Y1array[0] = 0.5 * (Yarray[0] + Yarray[num - 1]);
for (int i3 = 1;i3 < num;i3 + + )
{
        Carray[i3] = - (Yarray[i3] - Yarray[i3 - 1])/sqrt((Xarray[i3]
                - Xarray[i3 - 1]) * (Xarray[i3] - Xarray[i3 - 1]) +
                    (Yarray[i3] - Yarray[i3 - 1]) * (Yarray[i3] -
    Yarray[i3 - 1]));
        Sarray[i3] = (Xarray[i3] - Xarray[i3 - 1])/sqrt((Xarray[i3]
                - Xarray[i3 - 1]) * (Xarray[i3] - Xarray[i3 - 1]) +
                    (Yarray[i3] - Yarray[i3 - 1]) * (Yarray[i3] -
    Yarray[i3 - 1]));
}
Carray[0] = - (Yarray[0] - Yarray[num - 1])/sqrt((Xarray[0]
                - Xarray[num - 1]) * (Xarray[0] - Xarray[num - 1]) +
                    (Yarray[0] - Yarray[num - 1]) * (Yarray[0] -
    Yarray[num - 1]));
Sarray[0] = (Xarray[0] - Xarray[num - 1])/sqrt((Xarray[0]
                - Xarray[num - 1]) * (Xarray[0] - Xarray[num - 1]) +
                    (Yarray[0] - Yarray[num - 1]) * (Yarray[0] -
    Yarray[num - 1]));
double Vy;
for(int i4 = 0;i4 < num;i4 + + )
{
        for(int h = 0;h < num;h + + )
        {
                if(h!  = i4)
                {
double x = (X1array[i4] - X1array[h]) * Sarray[h] -
            (Y1array[i4] - Y1array[h]) * Carray[h];
        double y = (Y1array[i4] - Y1array[h]) * Sarray[h] +
            (X1array[i4] - X1array[h]) * Carray[h];
            double Vx = 1/(4 * j) * log(((x + length[h]/2) * (x + length
```

```
                    [h]/2) + y * y)/
                            ((x - length[h]/2) * (x - length[h]/2) + y * y));
        if (y = = 0)
                            Vy = 0;
                    else
                      Vy = 1/(2 * j) * (atan((x + length[h]/2)/y) - atan((x -
                      length[h]/2)/y));
                      * (A + i4 * num + h) = Vy * Carray[h] * Carray[i4] + Vy
                      * Sarray[h]
                            * Sarray[i4] + Vx * Sarray[h] * Carray[i4]
                    - Vx * Carray[h] * Sarray[i4];
                }
                }
* (A + i4 * num + i4) = 0.5;
          V[i4] = Carray[i4];
        }
        agaus(A, V, num);
        for(int j1 = 0; j1 < num; j1 + + )
        {
                result = 0.0;
                for(int j2 = 0; j2 < num; j2 + + )
                {
          if(j2!  = j1)
                    {
        double x = (X1array[j1] - X1array[j2]) * Sarray[j2] -
                        (Y1array[j1] - Y1array[j2]) * Carray[j2];
                      double y = (Y1array[j1] - Y1array[j2]) * Sarray[j2] +
                        (X1array[j1] - X1array[j2]) * Carray[j2];
                            double temp1 = V[j2];
                            double temp2 = - length[j2]/2;
                            double temp3 = length[j2]/2;
                            double eps = 0.000001;
                              temp = flrgs(x, y, temp1, temp2, temp3, eps);
                                 result = result + temp;
                    }
                }
                Q[j1] = - (result + V[j1]/j * (length[j1]/2 * log(length[j1]/2) -
                length[j1]/2));
```

```
        }
for(int i1 = 1;i1 < num;i1 + + )
        {
    length1[i1] = sqrt((X1array[i1] - X1array[i1 - 1]) * (X1array[i1] - X1array[i1 - 1]) +
            (Y1array[i1] - Y1array[i1 - 1]) * (Y1array[i1] - Y1array[i1 - 1]));
        }
        length1[0] = sqrt((X1array[0] - X1array[num - 1]) * (X1array[0] - X1array
        [num - 1]) +
            (Y1array[0] - Y1array[num - 1]) * (Y1array[0] - Y1array[num - 1]));
        double R = 0.0;
        for(int j3 = 0;j3 < num - 3;)
        {
            R = R + (length1[j3 + 1] + length1[j3 + 2])/6 * (Q[j3] * Carray[j3] + 4 *
            Q[j3 + 1] * Carray[j3 + 1] + Q[j3 + 2]
             * Carray[j3 + 2]);
            j3 = j3 + 2;
        }
        R = R + (length1[0] + length1[num - 1])/6 * (Q[num - 2] * Carray[num - 2] +
        4 * Q[num - 1] * Carray[num - 1] + Q[0]
             * Carray[0]);
  return R;
}
int agaus(double a[],double b[],int n)
{ int  * js,l,k,i,j,is,p,q;
  double d,t;
  js = (int  * )malloc(n * sizeof(int));
  l = 1;
  for (k = 0;k < = n - 2;k + + )
    { d = 0.0;
      for (i = k;i < = n - 1;i + + )
        for (j = k;j < = n - 1;j + + )
          { t = fabs(a[i * n + j]);
            if (t > d) { d = t; js[k] = j; is = i;}
          }
        if (d + 1.0 = = 1.0) l = 0;
        else
          { if (js[k]!  = k)
            for (i = 0;i < = n - 1;i + + )
```

```
            { p=i*n+k; q=i*n+js[k];
              t=a[p]; a[p]=a[q]; a[q]=t;
            }
          if (is!=k)
            { for (j=k;j<=n-1;j++)
                { p=k*n+j; q=is*n+j;
                  t=a[p]; a[p]=a[q]; a[q]=t;
                }
              t=b[k]; b[k]=b[is]; b[is]=t;
            }
        }
      if (l==0)
        { free(js); printf("fail\n");
          return(0);
        }
      d=a[k*n+k];
        for (j=k+1;j<=n-1;j++)
          { p=k*n+j; a[p]=a[p]/d;}
        b[k]=b[k]/d;
        for (i=k+1;i<=n-1;i++)
          { for (j=k+1;j<=n-1;j++)
              { p=i*n+j;
                a[p]=a[p]-a[i*n+k]*a[k*n+j];
              }
            b[i]=b[i]-a[i*n+k]*b[k];
          }
      }
    d=a[(n-1)*n+n-1];
    if (fabs(d)+1.0==1.0)
      { free(js); printf("fail\n");
        return(0);
      }
    b[n-1]=b[n-1]/d;
    for (i=n-2;i>=0;i--)
      { t=0.0;
        for (j=i+1;j<=n-1;j++)
          t=t+a[i*n+j]*b[j];
        b[i]=b[i]-t;
```

```
        }
      js[n-1]=n-1;
      for (k=n-1;k>=0;k--)
        if (js[k]!=k)
          { t=b[k]; b[k]=b[js[k]]; b[js[k]]=t;}
      free(js);
      return(1);
    }
double flrgsf(double x1,double x2,double x3,double x4)
{
        double y;
        y=x3/(4*3.1415926)*log((x1-x4)*(x1-x4)+x2*x2);
          return y;
}
double flrgs(double x1,double x2,double x3,double a,double b,double eps)
{ int m,i,j;
  double s,p,ep,h,aa,bb,w,x,g;
  static double t[5]={-0.9061798459,-0.5384693101,0.0,
                0.5384693101,0.9061798459};
  static double c[5]={0.2369268851,0.4786286705,0.5688888889,
                0.4786286705,0.2369268851};
  m=1;
  h=b-a; s=fabs(0.001*h);
  p=1.0e+35; ep=eps+1.0;
  while ((ep>=eps)&&(fabs(h)>s))
    { g=0.0;
      for (i=1;i<=m;i++)
        { aa=a+(i-1.0)*h; bb=a+i*h;
          w=0.0;
          for (j=0;j<=4;j++)
            { x=((bb-aa)*t[j]+(bb+aa))/2.0;
              w=w+flrgsf(x1,x2,x3,x)*c[j];
            }
          g=g+w;
        }
      g=g*h/2.0;
      ep=fabs(g-p)/(1.0+fabs(g));
      p=g; m=m+1; h=(b-a)/m;
```

```
    }
  return(g);
}
//计算圆截面形状系数举例
void main()
{
        int num=500;//鳞片数
        double x[500];//点的x坐标
        double y[500];//点的y坐标
        double pi=3.1415926;
        double r=1.0;//圆截面半径
        for(int i=0;i<num;i++)
        {
                x[i]=r*cos(-2.0*pi/num*i);
                y[i]=-r*sin(-2.0*pi/num*i);
        }
        double a11=f-a11(y,x,num);
        cout<<"半径为1.0的圆截面形状系数为"<<a11<<endl;
}
```

计算结果:半径为1.0的圆截面形状系数为3.15018

Press any key to continue

参考文献

[1] 杨岞生,俞守勤.飞行器部件空气动力学:修订版[M].北京:航空工业出版社,1987.

[2] 陈作斌,等.国防科研试验工程技术系列教材——计算空气动力学[M].北京:国防工业出版社,2003.

[3] 胡汉东.非圆截面机身及非常规平面形状机翼气动特性研究[D].穆阳:中国空气动力研究与发展中心工学博士学位论文,2002.

[4] 李晓斌.非圆截面导弹空气动力工程估算方法研究[D].长沙:国防科技大学工学硕士学位论文,2001.

[5] 冯亚南.椭圆机身—中单翼和园机身—非中单翼组合体的干扰因子估算[J].空气动力学学报,1981(2):37-48.

[6] 徐华舫.空气动力学基础[M].北京:北京航空学院出版社,1986.

[7] Hemsh M J.战术导弹空气动力学[M].洪金森,杨其德,等译.北京:宇航出版社,1999.

[8] 董月娟.APTGD巡航导弹的隐身技术分析[J].飞航导弹,1996(5):14-19.

[9] 董月娟.非圆截面导弹的气动力研究[J].战术导弹技术,1997(2):21-27.

[10] Beall B W. Application of Slender Body Theory to Bodies with Arbitrary Shaped Cross Sections[J]. AIAA-86-0488, 1986.

[11] Sigal A, Lapidot E. The Aerodynamic Characteristics of Configurations Having Bodies With Square, Rectangular and Circular Cross-Section at a Mach Number of 0.75[J]. AIAA-87-2429, 1987.

[12] Fuller D E, Shaw D S, Wassum D L. Effect of Cross-Section Shape on the Aerodynamic Characteristics of Bodies at Mach Numbers from 2.50 to 4.63[R]. NASA TN D-1620, 1963.

[13] Hutt G R, Howe A J. Effects of Cross Section and Nose Geometry on Slender Body Supersonic Aerodynamics[J]. Journal of Spacecraft and Rockets, 1988, 25(2): 189-192.

[14] Asher Sigal. An Experimental Investigation of The Aerodynamic Characteristics of Bodies Having Square Cross-section at Transonic Speeds[J]. AIAA-84-2091, 1984.

[15] Est B E, Nelson H F. Wing Vertical Position Effects on Wing-Body Carryover for Noncircular Missiles[J]. Journal of Spacecraft and Rockets, 1994, 31(6): 999-1006.

[16] Vukelich S R. Aerodynamic Prediction of Elliptically Shaped Missile Configurations Using Component Build-Up Methodology[J]. AIAA-85-0271, 1985.

[17] Lijewski L E. Experimental Flow Field Measurements with Square Cross Sections[J]. AIAA - 82 - 0055, 1982.

[18] Est B E, Nelson H F. Aerodynamic Forces on Noncircular Cross-Section Missile Forebodes. Journal of Aircraft, 1992, 29(4): 612 ~ 618.

[19] 刘君,李晓斌,徐春光．非圆截面形状弹体法向气动力估算方法研究[J]. 流体力学实验与测量,2002,16(3):86 - 90.

[20] 刘君,徐春光,李晓斌．非圆截面导弹气动力估算方法研究[J]. 战术导弹技术,2002(7):6 - 11.

[21] 刘君,李晓斌,徐春光．非圆截面翼身干扰系数估算方法研究[J]. 流体力学实验与测量,2003,17(4):96 - 98.

[22] 李晓斌,刘君,郭正．非圆截面形状弹体法向气动力工程估算方法研究[J]. 弹箭与制导学报,2001,21(3):66 - 69.

[23] 周松柏．卷弧翼与圆截面导弹气动力工程估算方法研究[D]. 长沙:国防科技大学工学学士学位论文,2003.